

Άσκηση 1

Έστω $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

i. Δείξτε ότι $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ii. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$

iii. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $\frac{f'(x)}{f(x)}$

iv. Δείξτε ότι $\sqrt{(a + \sqrt{a^2 + 1})(b + \sqrt{b^2 + 1})} \leq \frac{a+b}{2} + \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 1} \quad \forall a, b > 0$

ΛΥΣΗ

i. Η f ορίζεται $\forall x \in \mathbb{R}$ τότε:

Αν $x = 0$ έχουμε $f(0) = 1 > 0$

Αν $x > 0$ έχουμε $f(x) > 0$

Αν $x < 0$ έχουμε $f(x) > 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 1} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} > -x \Leftrightarrow x^2 + 1 > x^2 \Leftrightarrow 1 > 0$

Άρα $\forall x \in \mathbb{R}$ η $f(x) > 0$

ii. $\forall x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Άρα $f'(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}}$ δηλαδή $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad (1)$

τότε $I = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int_0^2 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = [\ln(f(x))]_0^2 = \ln f(2) - \ln f(0) = \ln(2 + \sqrt{5})$.

iii. $\forall x \in \mathbb{R}$ έχουμε $\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' = \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)' = \frac{-(\sqrt{x^2 + 1})'}{x^2 + 1} = -\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} = -\frac{x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$.

Τότε $\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' > 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0$.

Άρα η $\frac{f'}{f}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$

iv. Έστω $g(x) = \ln(f(x))$, $x \in [0, +\infty)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι:

$\sqrt{(a + \sqrt{a^2 + 1})(b + \sqrt{b^2 + 1})} \leq \frac{a+b}{2} + \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 1} \quad \forall a, b > 0$.

Παρατηρούμε ότι αν $a = b$ η σχέση ισχύει ως ισότητα. Αν $a \neq b$ έστω $a < b$ έχουμε ότι:

Για την g ισχύει το θεώρημα μέσης τιμής στο $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ και $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$.

Άρα υπάρχουν $x_1 \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ και $x_2 \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$ τέτοια ώστε: $g'(x_1) = \frac{g\left(\frac{a+b}{2}\right) - g(a)}{\frac{\beta - \alpha}{2}}$ και $g'(x_2) = \frac{g(b) - g\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\frac{\beta - \alpha}{2}}$.

Από iii ερώτημα έχουμε ότι g' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ άρα και στο $[a, b]$. Επίσης $x_1 < x_2$ άρα $g'(x_1) > g'(x_2)$

δηλαδή $\frac{g(b) - g\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\frac{\beta - \alpha}{2}} < \frac{g\left(\frac{a+b}{2}\right) - g(a)}{\frac{\beta - \alpha}{2}}$ όπου $\frac{\beta - \alpha}{2} > 0$.

Άρα $g(\beta) - g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - g(\alpha)$ δηλαδή:

$$\begin{aligned} g(\alpha) + g(\beta) < 2g\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) &\Leftrightarrow \ln f(\alpha) + \ln f(\beta) < 2\ln f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow \ln(f(\alpha) \cdot f(\beta)) < 2\ln f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln(f(\alpha) \cdot f(\beta)) < \ln f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow \ln \sqrt{f(\alpha) \cdot f(\beta)} < \ln f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow \sqrt{f(\alpha) \cdot f(\beta)} < f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1})(\beta + \sqrt{\beta^2 + 1})} < \frac{\alpha + \beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 + 1} \end{aligned}$$

Άσκηση 2

Έστω $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $g(x) + \lambda \cdot x + 4 \leq \frac{2}{x}$ (1) και $g(x) \geq -4 - 6x + \frac{1}{4x}$ (2), $\forall x > 0$ και $g(1) = -2 - \lambda$, $g'(1) = -8$.

i. Βρείτε τον αριθμό λ .

ii. Βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

iii. Υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) + \eta\mu x + 4}{xg(x) + 6x^2 + \ln x}$.

ΛΥΣΗ

i. Από την (1) έχουμε $g(x) + \lambda \cdot x + 4 - \frac{2}{x} \leq 0, \forall x > 0$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = g(x) + \lambda x + 4 - \frac{2}{x} \leq 0, x > 0$.

Παρατηρούμε ότι $f(1) = g(1) + \lambda + 4 - 2 = g(1) + \lambda + 2 = 0$.

Άρα $f(x) \leq f(1) \forall x > 0$. Δηλαδή η f παρουσιάζει στο $x = 1$ εσωτερικό του $(0, +\infty)$ μέγιστο, είναι και παραγωγίσιμη, άρα από Θεώρημα Fermat ισχύει $f'(1) = 0$.

Όμως $f'(x) = g'(x) + \lambda + \frac{2}{x^2}$. Άρα $f'(1) = 0 \Leftrightarrow g'(1) + \lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow -8 + \lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = 6}$.

ii. Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι: $-4 - 6x + \frac{1}{4x} \leq g(x) \leq -\lambda x - 4 + \frac{2}{x}$.

Για $\lambda = 6$ έχουμε: $-4 - 6x + \frac{1}{4x} \leq g(x) \leq -6x - 4 + \frac{2}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{4x} \leq g(x) + 6x + 4 \leq \frac{2}{x}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4x} = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$, άρα από κριτήριο παρεμβολής έχουμε: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + 6x + 4) = 0$ ή $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (-6x - 4)] = 0$.

Άρα η $y = -6x - 4$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

iii. Από ii έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = -6$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + 6x) = -4$ τότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) + \eta\mu x + 4}{xg(x) + 6x^2 + \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\frac{g(x)}{x} + \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{4}{x} \right)}{x \left(g(x) + 6x + \frac{\ln x}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{g(x)}{x} + \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{4}{x}}{g(x) + 6x + \frac{\ln x}{x}}$$

Όμως $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{\ln x}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

και $\left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x}, x > 0$ άρα $-\frac{1}{x} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{x}$ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Άρα από κριτήριο παρεμβολής το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) + \eta\mu x + 4}{xg(x) + 6x^2 + \ln x} = \frac{-4}{-4} = \frac{3}{2}$.

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΠΕΤΡΑΚΗ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ • ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ
ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΤΣΑΜΠΟΥΡΗΣ • ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ

εκπαιδευτικός οργανισμός

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ