

ΑΣΚΗΣΗ 1

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 , με $|z_2| = 1$ ώστε να ισχύει: $|z_1 \eta \mu x + z_2 \sigma \upsilon \nu x| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ (1).

α. Να δείξετε ότι $\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) = 0$.

β. Αν M, N οι εικόνες των z_1, z_2 αντίστοιχα και O η αρχή των αξόνων να δείξετε ότι το τρίγωνο MON είναι ορθογώνιο

γ. Αν επιπλέον δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) \cdot f(-x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ και

$$\int_{-|z_1|}^{|z_1|} \frac{1}{1+|f(x)|} dx = 1 \text{ τότε να βρείτε το } |z_1|$$

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε $|z_1 \eta \mu x + z_2 \sigma \upsilon \nu x|^2 \leq 1 \Leftrightarrow (z_1 \eta \mu x + z_2 \sigma \upsilon \nu x)(\overline{z_1} \eta \mu x + \overline{z_2} \sigma \upsilon \nu x) \leq 1 \Leftrightarrow$

$$|z_1|^2 \eta \mu^2 x + z_1 \overline{z_2} \eta \mu x \sigma \upsilon \nu x + z_2 \overline{z_1} \eta \mu x \sigma \upsilon \nu x + |z_2|^2 \sigma \upsilon \nu^2 x \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$|z_1|^2 \eta \mu^2 x + 2 \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) \eta \mu x \sigma \upsilon \nu x + \sigma \upsilon \nu^2 x - 1 \leq 0$$

Έστω $g(x) = |z_1|^2 \eta \mu^2 x + 2 \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) \eta \mu x \sigma \upsilon \nu x + \sigma \upsilon \nu^2 x - 1$ τότε $g(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $g(0) = 0$. Άρα

$g(x) \leq g(0), \forall x \in \mathbb{R}$. Στο $x_0 = 0$ εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$ η g παραγωγίζεται και παρουσιάζει μέγιστο, άρα από

Θεώρημα Fermat $g'(0) = 0$

Όμως $g'(x) = 2 \eta \mu x \sigma \upsilon \nu x |z_1|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) \sigma \upsilon \nu^2 x - 2 \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) \eta \mu^2 x - 2 \eta \mu x \sigma \upsilon \nu x$

$$g'(0) = 0 \Leftrightarrow 2 \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) = 0.$$

β. $|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = z_1 \overline{z_1} - z_1 \overline{z_2} - z_2 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 - 2 \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) + |z_2|^2 \stackrel{(a)}{=} |z_1|^2 + |z_2|^2$

Άρα $(MN)^2 = (OM)^2 + (ON)^2$. Επομένως το τρίγωνο MON είναι ορθογώνιο.

γ. Έχουμε $f(x) \cdot f(-x) = 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{f(-x)}, \forall x \in \mathbb{R}$. Τότε $I = \int_{-|z_1|}^{|z_1|} \frac{1}{1+|f(x)|} dx = \int_{-|z_1|}^{|z_1|} \frac{|f(-x)|}{1+|f(-x)|} dx$.

Θέτουμε $-x = u$ άρα $dx = -du$. Όταν $x = -|z_1|$ το $u = |z_1|$ και όταν $x = |z_1|$ το $u = -|z_1|$.

$$\text{Άρα } I = - \int_{|z_1|}^{-|z_1|} \frac{|f(u)|}{1+|f(u)|} du = \int_{-|z_1|}^{|z_1|} \frac{|f(x)|}{1+|f(x)|} dx.$$

$$\text{Αν } J = \int_{-|z_1|}^{|z_1|} \frac{|f(x)|}{1+|f(x)|} dx \text{ τότε } I + J = \int_{-|z_1|}^{|z_1|} \frac{1}{1+|f(x)|} dx + \int_{-|z_1|}^{|z_1|} \frac{|f(x)|}{1+|f(x)|} dx = \int_{-|z_1|}^{|z_1|} dx = [x]_{-|z_1|}^{|z_1|} = 2|z_1|.$$

Όμως $I = J = 1$. Άρα $I + J = 2 \Leftrightarrow 2|z_1| = 2 \Leftrightarrow |z_1| = 1$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Για δύο συναρτήσεις f, g ισχύει $f(x) \cdot f'(x) + g'(x) \cdot g''(x) = x$ για κάθε $x \in [2, +\infty)$ με $f(2) = 1, g'(2) = \sqrt{3}$

και $|f(x)| \neq x$ για κάθε $x \geq 2$.

i. Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in [2, +\infty)$

ii. Αν η ευθεία $y = \lambda x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ να δείξετε ότι $-1 \leq \lambda \leq 1$

iii. Αν $f'(x) \cdot f(x) = \frac{x}{2}, x \geq 2$ να βρείτε τον τύπο και τις ασύμπτωτες της συνάρτησης f

ΛΥΣΗ

i. Έχουμε $f(x) \cdot f'(x) + g'(x) \cdot g''(x) = x \Leftrightarrow 2f(x) \cdot f'(x) + 2g'(x) \cdot g''(x) = 2x \Leftrightarrow (f^2(x))' + ([g'(x)]^2)' = (x^2)' \Leftrightarrow$

$$f^2(x) + [g'(x)]^2 = x^2 + c. \text{ Για } x = 2 \text{ έχουμε } f^2(2) + [g'(2)]^2 = 4 + c \Leftrightarrow 1 + \sqrt{3}^2 = 4 + c \Leftrightarrow c = 0$$

Άρα $f^2(x) + [g'(x)]^2 = x^2$ **(1)**

Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in [2, +\infty)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0) = 0$, τότε για $x = x_0$ η **(1)** γράφεται

$$f^2(x_0) + [g'(x_0)]^2 = x_0^2 \Leftrightarrow f^2(x_0) = x_0^2 \Leftrightarrow |f(x_0)| = x_0. \text{ Άτοπο αφού } |f(x)| \neq x \text{ για κάθε } x \geq 2.$$

Άρα $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [2, +\infty)$

Η g' είναι συνεχής στο $\Delta = [2, +\infty)$, ως παραγωγίσιμη συνάρτηση, και $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, άρα η g'

διατηρεί το πρόσημο της. Όμως $g'(2) = \sqrt{3} > 0$, επομένως $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in [2, +\infty)$.

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta = [2, +\infty)$

ii. Επειδή η ευθεία $y = \lambda x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda$.

$$\text{Ισχύει ότι: } f^2(x) \leq f^2(x) + [g'(x)]^2 = x^2 \text{ άρα } f^2(x) \leq x^2 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 \leq 1.$$

$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 \leq 1. \text{ Άρα } \lambda^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \lambda \leq 1.$$

iii. Έχουμε $f'(x) \cdot f(x) = \frac{x}{2} \Leftrightarrow 2f'(x) \cdot f(x) = x \Leftrightarrow (f^2(x))' = \left(\frac{x^2}{2}\right)' \Leftrightarrow f^2(x) = \frac{x^2}{2} + c.$

$$\text{Για } x=2 \text{ έχουμε } f^2(2) = \frac{2^2}{2} + c \Leftrightarrow c = -1 \text{ άρα } f^2(x) = \frac{x^2}{2} - 1 \Leftrightarrow f^2(x) = \frac{x^2 - 2}{2}, x \geq 2.$$

$$\text{Όμως } \frac{x^2 - 2}{2} \neq 0, \forall x \in [2, +\infty), \text{ άρα } f(x) \neq 0 \text{ και συνεχής με } f(2) = 1 > 0 \text{ άρα } f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in [2, +\infty).$$

$$\text{Τελικά } f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{x^2 - 2}$$

Η f είναι συνεχής, στο διάστημα $[2, +\infty)$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\text{Ακόμα έχουμε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 - 2}}{2x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 - \frac{2}{x^2}}}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{\sqrt{2}}{2} x \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2} - x \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt{x^2 - 2} + x} = -\sqrt{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \left(\sqrt{1 - \frac{2}{x^2}} + 1 \right)} = 0$$

$$\text{Άρα η ευθεία } y = \frac{\sqrt{2}}{2} x \text{ είναι ασύμπτωτη της } C_f \text{ στο } +\infty$$

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΠΕΤΡΑΚΗ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ

ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ

ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΤΣΑΜΠΟΥΡΗΣ • ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ