

ΑΣΚΗΣΗ 1

A. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x_0^2) = 2f(x_0^2) = 4$ με $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης $g(x) = f(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$ στο $A(x_0, g(x_0))$ που διέρχεται από το $P(1, 2)$.

B. Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \left\{ \frac{\alpha}{65}, 3, \frac{\alpha}{15} \right\}$, $\alpha \neq 0$. Αν $P(\lambda) = \frac{1}{2\lambda}$, $\lambda \in \Omega$ και η συνάρτηση $h(x) = x^2 - 2x$ της οποίας τα σημεία $A_1, \dots, A_{10}$ έχουν τετμημένες $x_1, \dots, x_{10}$ με $\bar{x} = s = 1$.

i. Να βρείτε το α .

ii. Έστω τα ενδεχόμενα:

$A = \{ \lambda \in \Omega : \lambda \text{ είναι η τετμημένη του σημείου της εφαπτομένης του ερωτήματος A, που βρίσκεται πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων} \}$

$B = \{ \lambda \in \Omega : 3\lambda = \bar{y} + \lambda^2 \text{ όπου } \bar{y} \text{ η μέση τιμή των τεταγμένων } y_1, \dots, y_{10} \text{ των } A_1, \dots, A_{10} \}$

Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$, $P[(A \cup B)']$.

ΛΥΣΗ

A. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g είναι της μορφής $\varepsilon: y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0)$ ①

$$g(x_0) = f(x_0^2) = \frac{4}{2} = 2. \text{ Επίσης } g'(x) = [f(x^2)]' = f'(x^2) \cdot 2x \text{ και } g'(x_0) = f'(x_0^2) \cdot 2x_0 = 4 \cdot 2x_0 = 8x_0.$$

Το σημείο $P(1, 2)$ ανήκει στην ε . Άρα από την ① έχουμε: $2 - 2 = 8x_0(1 - x_0) \Leftrightarrow x_0 = 1$ $x_0 \in \mathbb{R}^*$

Οπότε η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $\varepsilon: y - 2 = 8(x - 1) \Leftrightarrow y = 8x - 6$.

B. i. Ισχύει ότι $P\left(\frac{\alpha}{65}\right) = \frac{1}{2\alpha} = \frac{65}{2\alpha}$, $P(3) = \frac{1}{6}$ και $P\left(\frac{\alpha}{15}\right) = \frac{1}{2\alpha} = \frac{15}{2\alpha}$

$$\text{Επίσης } P\left(\frac{\alpha}{65}\right) + P(3) + P\left(\frac{\alpha}{15}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{65}{2\alpha} + \frac{1}{6} + \frac{15}{2\alpha} = 1 \Leftrightarrow \frac{240 + \alpha}{6\alpha} = 1 \Leftrightarrow \alpha = 48.$$

ii. Έστω $M(x, 8x - 6)$ σημείο της ε . Η απόσταση του M από την αρχή των αξόνων είναι:

$$d(x) = \sqrt{x^2 + (8x - 6)^2}, x \in \mathbb{R}$$

$$d'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + (8x - 6)^2}} \cdot (2x + 2(8x - 6) \cdot 8) = \frac{65x - 48}{\sqrt{x^2 + (8x - 6)^2}}$$

$$d'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{48}{65}, \quad d'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{48}{65}$$

Ο πίνακας προσήμου της $d'(x)$ είναι:

x	$-\infty$	$\frac{48}{65}$	$+\infty$
$d'(x)$		0	
	-		+
$d(x)$			

Οπότε η τετμημένη του σημείου που είναι το πλησιέστερο στην αρχή των αξόνων είναι η $\frac{48}{65}$.

$$\text{Άρα } A = \left\{ \frac{48}{65} \right\}.$$

$$\text{Επίσης } h(x) = y = x^2 - 2x = x^2 - 2x + 1 - 1 \Leftrightarrow y = (x - 1)^2 - 1 \text{ οπότε}$$

$$y_i = (x_i - 1)^2 - 1, \quad i = 1, \dots, 10$$

$$\text{τότε } \bar{y} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y_i = \frac{1}{10} \left[\sum_{i=1}^{10} (x_i - 1)^2 - 1 \right] = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 - \frac{1}{10} \cdot 10 = s_x^2 - 1 = 0.$$

Άρα $3\lambda = \lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = 3$. Άρα $B = \{3\}$

$$\text{Οπότε } P(A) = P\left(\frac{48}{65}\right) = \frac{1}{2 \cdot \frac{65}{48}} = \frac{65}{96}, \quad P(B) = P(3) = \frac{1}{6}$$

Τα ενδεχόμενα A, B είναι ασυμβίβαστα

$$P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - \frac{65}{96} - \frac{1}{6} = \frac{15}{96}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_v\}$ δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης με περιττό πλήθος δυνατών αποτελεσμάτων.

Αν τα $\alpha_i = P(\omega_i)$, $i = 1, 2, \dots, v$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με λόγο $\lambda > 1$ και $\alpha_1 = \frac{1}{\lambda^v - 1}$ τότε:

- Να βρείτε το λ .
- Αν $A_k = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ τότε να δείξετε ότι $P(A_k) = P(A_{k+1} \cap A_k') - P(A_1)$.
- Αν επιπλέον η διάμεσος των α_i^2 , $i = 1, 2, \dots, v$ είναι $\delta = 16\alpha_1^2$, να βρείτε το v .
- Να εξετάσετε αν το δείγμα των α_i , $i = 1, 2, \dots, v$ είναι ομοιογενές.

ΛΥΣΗ

i. Είναι $\sum_{i=1}^v P(\omega_i) = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^v \alpha_i = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^v - 1}{\lambda - 1} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda^v - 1} \cdot \frac{\lambda^v - 1}{\lambda - 1} = 1 \Leftrightarrow \lambda = 2$

ii. Είναι $P(A_k) = \sum_{i=1}^k P(\omega_i) = S_k = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^k - 1}{\lambda - 1} = \alpha_1 (2^k - 1) = \alpha_1 \cdot 2^k - \alpha_1 = \alpha_{k+1} - \alpha_1 = P(\omega_{k+1}) - P(\omega_1)$.

Ακόμη $P(A_{k+1} \cap A_k') - P(A_1) = P(A_{k+1} - A_k) - P(A_1) = P(\omega_{k+1}) - P(\omega_1)$.

Άρα $P(A_k) = P(A_{k+1} \cap A_k') - P(A_1)$

iii. Τα α_i^2 αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου με λόγο λ^2 αφού $\frac{\alpha_{i+1}^2}{\alpha_i^2} = \frac{(\lambda \alpha_i)^2}{\alpha_i^2} = \lambda^2$, $i = 1, 2, \dots, v-1$.

Επιπλέον $\lambda^2 = 4$ άρα $\alpha_1^2 < \alpha_2^2 < \dots < \alpha_v^2$.

Αφού v περιττός, $\delta = \alpha_{\frac{v+1}{2}}^2 \Leftrightarrow 16\alpha_1^2 = \alpha_1^2 \cdot 4^{\frac{v+1}{2}-1} \Leftrightarrow 4^{\frac{v-1}{2}} = 16 \Leftrightarrow \frac{v-1}{2} = 2 \Leftrightarrow v = 5$

iv. Ισχύει ότι $s^2 = \frac{1}{5} \left\{ \sum_{i=1}^5 \alpha_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^5 \alpha_i \right)^2}{5} \right\} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \alpha_i^2 - \left(\frac{\sum_{i=1}^5 \alpha_i}{5} \right)^2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \alpha_i^2 - \bar{x}^2$.

Όμως $\bar{x} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 \alpha_i = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 P(\omega_i) = \frac{1}{5}$

και $\sum_{i=1}^5 \alpha_i^2 = S_5 = \alpha_1^2 \frac{(\lambda^2)^5 - 1}{\lambda^2 - 1} = \frac{1}{31^2} \frac{4^5 - 1}{4 - 1} = \frac{1023}{3 \cdot 31^2} = \frac{341}{31^2}$

Άρα $s^2 = \frac{341}{5 \cdot 31^2} - \frac{1}{25} = \frac{5 \cdot 341 - 31^2}{5^2 \cdot 31^2} = \frac{5 \cdot 31 \cdot 11 - 31^2}{5^2 \cdot 31^2} = \frac{24}{5^2 \cdot 31}$ οπότε $s = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{24}{31}}$.

Συνεπώς, $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \sqrt{\frac{24}{31}} > 0,1$

και το δείγμα είναι ανομοιογενές.

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΠΕΤΡΑΚΗ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ

ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ

ΑΝΔΡΕΑΣ ΤΣΙΑΙΦΩΝΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΤΣΑΜΠΟΥΡΗΣ

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ