

ΑΣΚΗΣΗ 1

- α. Δίνεται συνάρτηση f , με συνεχή πρώτη παράγωγο, και η συνάρτηση $g(x) = 2f(x) + f'(x) - e^{-2x}$ της οποίας η γραφική παράσταση δεν βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$, για κάθε $x \geq 0$.

Αν $f(0) = 0$ και $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{4e} - \frac{f(1)}{2}$ να δείξετε ότι $g(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$

- β. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x}{e^{2x}}$ για κάθε $x \in [0, 1]$
- γ. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
- δ. Να δείξετε ότι $\int_0^1 e^{2u^2} du \geq \frac{2e}{3}$ για κάθε $u \in [-1, 1]$.

ΛΥΣΗ

- α. Η συνάρτηση $g(x) = 2f(x) + f'(x) - e^{-2x}$ είναι συνεχής για κάθε $x \geq 0$ και επειδή η γραφική της παράσταση δεν βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ ισχύει ότι: $g(x) \geq 0$ για $x \in [0, 1]$
Έστω ότι η g δεν είναι παντού μηδέν στο $[0, 1]$ τότε:

$$\int_0^1 g(x)dx > 0 \Leftrightarrow 2 \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 f'(x)dx + \int_0^1 -e^{-2x}dx > 0 \Leftrightarrow 2 \int_0^1 f(x)dx + [f(x)]_0^1 + \left[\frac{e^{-2x}}{2} \right]_0^1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$2 \int_0^1 f(x)dx > \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} - f(1) \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx > \frac{1}{4} - \frac{1}{4e} - \frac{f(1)}{2} \text{ άποπο αφού } \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{4e} - \frac{f(1)}{2}.$$

Άρα $g(x) = 0$ στο $[0, 1]$.

- β. Από ερώτημα (α) έχουμε ότι $g(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$ άρα και

$$2f(x) + f'(x) - e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x}f(x) + e^{2x}f'(x) = 1 \Leftrightarrow (e^{2x}f(x))' = (x)' \Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{e^{2x}} + \frac{c}{e^{2x}}.$$

Έχουμε $f(0) = 0$ και βρίσκουμε ότι $c = 0$ άρα $f(x) = \frac{x}{e^{2x}}$ με $x \in [0, 1]$

- γ. Έχουμε την συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{e^{2x}}$, $x \in [0, 1]$ με παράγωγο $f'(x) = \frac{e^{2x} - 2xe^{2x}}{e^{4x}}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ και } f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

x	0	$\frac{1}{2}$	1
f'(x)		+	-
f(x)		↗	↘

Η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in [0, \frac{1}{2}]$ και γνησίως φθίνουσα για

κάθε $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. Η f έχει μέγιστο στο $x_0 = \frac{1}{2}$ το $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2e}$

- δ. Από προηγούμενο ερώτημα έχουμε $f(x) \leq \frac{1}{2e} \Leftrightarrow \frac{x}{e^{2x}} \leq \frac{1}{2e} \Leftrightarrow 2xe \leq e^{2x}$.

Στην τελευταία σχέση θέτουμε $x = u^2$ με $0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq u^2 \leq 1$ άρα $-1 \leq u \leq 1$

Επομένως για $u \in [-1, 1]$ έχουμε: $2u^2e \leq e^{2u^2} \Leftrightarrow 2u^2e - e^{2u^2} \leq 0 \Leftrightarrow h(u) \leq 0$

$$\text{άρα και } \int_0^1 h(u)du \leq 0 \Leftrightarrow \int_0^1 2eu^2 du \leq \int_0^1 e^{2u^2} du \Leftrightarrow \int_0^1 e^{2u^2} du \geq \frac{2e}{3}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^4}{4} + 2x^2 - \lambda x + \frac{15}{4}$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η $f(x) = 0$ έχει το πολύ δύο ρίζες.

β. Έστω ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ ακρότατο.

Αν η εικόνα του μιγαδικού z κινείται σε κύκλο κέντρου $K(0, 0)$ και ακτίνας 1, να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός

$w = \frac{f(3)}{z} + \frac{f(1)}{\bar{z}}$ κινείται σε έλλειψη, της οποίας να βρείτε τις εστίες.

ΛΥΣΗ

α. Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$.

Η f είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) με $f'(x) = x^3 + 4x - \lambda$.

Επίσης $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$.

Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ ώστε $f'(\xi_1) = 0$.

Ομοίως από το θεώρημα Rolle για την f στο $[\rho_2, \rho_3]$ υπάρχει $\xi_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ ώστε $f'(\xi_2) = 0$.

Η συνάρτηση $f'(x) = x^3 + 4x - \lambda$ είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) με $f''(x) = 3x^2 + 4$.

Επίσης $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$.

Επομένως από θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ ώστε $f''(\xi) = 0 \Leftrightarrow 3\xi^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow 3\xi^2 = -4$, άτοπο.

Άρα η $f(x) = 0$ έχει το πολύ δύο ρίζες.

β. Η f παρουσιάζει ακρότατο στο 1, είναι παραγωγίσιμη στο 1 και το 1 είναι εσωτερικό σημείο του $D_f = \mathbb{R}$.

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Fermat ισχύει ότι $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + 4 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 5$

Επομένως η f γίνεται $f(x) = \frac{x^4}{4} + 2x^2 - 5x + \frac{15}{4}$ με $f(1) = 1$ και $f(3) = 27$.

Έστω $z = a + bi$. Η εικόνα του z , $M(a, b)$ ανήκει στον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$ επομένως ισχύει ότι $a^2 + b^2 = 1$ ①

Έχουμε $w = \frac{f(3)}{z} + \frac{f(1)}{\bar{z}} = \frac{27}{a+bi} + \frac{1}{a-bi} = \frac{27(a-bi) + a+bi}{a^2+b^2} = 28a - 26bi$

Θέτουμε $w = x + yi$ άρα $\begin{cases} x = 28a \\ y = -26b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{x}{28} \\ b = -\frac{y}{26} \end{cases}$

Η σχέση ① γράφεται $\left(\frac{x}{28}\right)^2 + \left(-\frac{y}{26}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{784} + \frac{y^2}{676} = 1$ με $\gamma^2 = a^2 - b^2 = 108$

άρα $\gamma = 6\sqrt{3}$.

Επομένως ο μιγαδικός w κινείται σε έλλειψη με εστίες $E'(-6\sqrt{3}, 0), E(6\sqrt{3}, 0)$.

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΠΕΤΡΑΚΗ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ

ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ

ΑΝΔΡΕΑΣ ΤΣΙΛΙΦΩΝΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΤΣΑΜΠΟΥΡΗΣ

εκπαιδευτικός οργανισμός

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ