

Άσκηση 1

Έστω $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να λυθεί η ανίσωση $f(f(5x^2 - 4x)) > f\left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)$

γ. Δείξτε ότι η C_f έχει μοναδικό σημείο καμπής.

δ. Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $f(2011) + f(2008)$, $f(2010) + f(2009)$.

Λύση

α. $\forall x \in \mathbb{R}$ έχουμε: $f'(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

Αν $x = 1$ τότε $f'(1) = 5$. Αν $x \neq 1$ τότε $(x-1)f'(x) = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{x^5 - 1}{x - 1}$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $x > 1$ τότε και $x^5 > 1$ άρα $f'(x) > 0$
- Αν $x < 1$ τότε και $x^5 < 1$ άρα $f'(x) > 0$

Άρα $\forall x \in \mathbb{R}$ ή $f'(x) > 0$ επομένως η f είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν παρουσιάζει ακρότατο.

β. Παρατηρούμε ότι $f(1) = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2$.

Άρα

$$f(f(5x^2 - 4x)) > f\left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \Leftrightarrow f(f(5x^2 - 4x)) > f(f(1)) \xrightarrow{f \nearrow} f(5x^2 - 4x) > f(1) \Leftrightarrow 5x^2 - 4x > 1 \Leftrightarrow 5x^2 - 4x - 1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{5}\right) \cup (1, +\infty)$$

γ. $f''(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$. Έχουμε $f''(0) = 1 > 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f''(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^3 = -\infty$ άρα υπάρχει $x_1 < 0$ τέτοιο ώστε $f(x_1) < 0$ αφού η f'' συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (x_1, 0)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0) = 0$.

Όμως $f'''(x) = 12x^2 + 6x + 2 = 2(6x^2 + 3x + 1) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ γιατί $\Delta < 0$.

Άρα η f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ επομένως το x_0 είναι μοναδικό.

Τότε $\forall x > x_0$ ισχύει $f''(x) > f''(x_0) \Leftrightarrow f''(x) > 0$ ενώ $\forall x < x_0$ ισχύει $f''(x) < f''(x_0) \Leftrightarrow f''(x) < 0$

Δηλαδή

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''		$-$	$+$
f		$\cap$	$\cup$

Άρα η C_f έχει μοναδικό σημείο καμπής στο $A(x_0, f(x_0))$.

δ. Στο προηγούμενο ερώτημα δείξαμε ότι $f''(x) > 0 \quad \forall x > x_0$ όπου $x_0 < 0$. Άρα $\forall x > 0$ η $f''(x) > 0$ επομένως η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Για την f ισχύει το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο $[2008, 2009]$ και $[2010, 2011]$ άρα υπάρχει $\xi_1 \in (2008, 2009)$ και $\xi_2 \in (2010, 2011)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(2009) - f(2008)}{2009 - 2008} = f(2009) - f(2008) \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(2011) - f(2010)}{2011 - 2010} = f(2011) - f(2010)$$

όμως $\xi_1 < \xi_2$ και f' γνησίως αύξουσα. Άρα

$$f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Leftrightarrow f(2009) - f(2008) < f(2011) - f(2010) \Leftrightarrow f(2009) + f(2010) < f(2011) + f(2008)$$

Άσκηση 2

Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f(1) = 0$ και $f'(1) = e$. Αν $f'(x) = f(x) + \alpha \int_0^x \frac{e^t}{x^2 + t^2} dt$, $x > 0$, $\alpha > 0$.

α. Να βρείτε την f .

β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

γ. Βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{e^t}{x^2 + t^2} dt$

Λύση

α. Έστω $\frac{t}{x} = u \Leftrightarrow t = x \cdot u$ άρα $dt = x du$. Αν $t = 0$ το $u = 0$ και αν $t = x$ το $u = 1$.

$$\text{Άρα } \int_0^x \frac{e^t}{x^2 + t^2} dt = \int_0^1 \frac{e^{xu}}{x^2 + x^2 u^2} x du = \int_0^1 \frac{e^{xu}}{x^2 \cdot (1 + u^2)} x du = \frac{e^x}{x} \cdot \int_0^1 \frac{1}{1 + u^2} du = \frac{e^x}{x} \cdot \beta, \text{ όπου } \beta = \int_0^1 \frac{1}{1 + u^2} du.$$

$$\text{Επομένως } f'(x) = f(x) + \alpha \frac{e^x}{x} \cdot \beta.$$

$$\text{Αν } \alpha\beta = c, c \in \mathbb{R} \text{ έχουμε } f'(x) = f(x) + c \frac{e^x}{x} \quad \textcircled{1}.$$

$$\text{Αν } x = 1 \text{ τότε } f'(1) = f(1) + ce \Leftrightarrow e = ce \Leftrightarrow c = 1.$$

Άρα

$$f'(x) = f(x) + \frac{e^x}{x} \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = \frac{e^x}{x} \Leftrightarrow e^x f'(x) - e^x f(x) = \frac{e^{2x}}{x} \Leftrightarrow \frac{e^x f'(x) - e^x f(x)}{e^{2x}} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{e^x} \right)' = (\ln(x))' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^x} = \ln x + c_1.$$

$$\text{Για } x = 1 \text{ έχουμε } \frac{f(1)}{e} = \ln 1 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0. \text{ Άρα } \frac{f(x)}{e^x} = \ln x \Leftrightarrow f(x) = e^x \ln x, \quad x > 0$$

β. Έχουμε $f(x) = e^x \ln x$, $x > 0$ με $f'(x) = e^x \ln x + e^x \frac{1}{x} = e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right)$.

$$\text{Έστω } g(x) = \ln x + \frac{1}{x}, \quad x > 0 \text{ τότε } g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}, \quad g'(x) > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

Άρα

x	0	1	$+\infty$
g'		-	+
g		$\searrow$	$\nearrow$

Η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ άρα $\forall x > 0$ ισχύει $g(x) \geq g(1) \Leftrightarrow g(x) \geq 1 > 0$.

Όμως $f'(x) = e^x g(x) > 0 \quad \forall x > 0$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

γ. Από $\textcircled{1}$ έχουμε $f'(x) - f(x) = c \frac{e^x}{x}$ όπου $c = 1$.

$$\text{Άρα } f'(x) - f(x) = \frac{e^x}{x}. \text{ Από υπόθεση } f'(x) - f(x) = \alpha \int_0^x \frac{e^t}{x^2 + t^2} dt.$$

$$\text{Άρα } \frac{e^x}{x} = \alpha \int_0^x \frac{e^t}{x^2 + t^2} dt \Leftrightarrow \frac{e^x}{\alpha \cdot x} = \int_0^x \frac{e^t}{x^2 + t^2} dt.$$

$$\text{Τότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{e^t}{x^2 + t^2} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\alpha \cdot x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(\alpha \cdot x)'} = \frac{1}{\alpha} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \stackrel{\alpha > 0}{=} +\infty$$

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΠΕΤΡΑΚΗ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ

ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ

ΑΝΔΡΕΑΣ ΤΣΙΛΙΦΩΝΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΤΣΑΜΠΟΥΡΗΣ

Εκπαιδευτικός οργανισμός

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ