

ΑΣΚΗΣΗ

Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων Π_1 και Π_2 που απέχουν απόσταση $d = 45\text{cm}$, αρχίζουν τη στιγμή $t_0 = 0$ να εκτελούν κατακόρυφη απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση απομάκρυνσης $y = 0,02 \cdot \eta\mu\omega t$ (S.I.) και δημιουργούν στην επιφάνεια νερού που ηρεμεί εγκάρσια αρμονικά κύματα που διαδίδονται με ταχύτητα $v = 0,6\text{m/s}$.

Μικρό κομμάτι φελλού μάζας $m = 5\text{g}$, το οποίο θεωρούμε σημειακό, βρίσκεται στην επιφάνεια του νερού σε σημείο Σ που απέχει αποστάσεις r_1 και r_2 με $r_1 = 2r_2$ από τις πηγές Π_1 και Π_2 αντίστοιχα. Μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο Σ , το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας του φελλού γίνεται $v_{\max} = 48\pi \text{ cm/s}$, 12 φορές το δευτερόλεπτο. Μεταξύ του Σ και της μεσοκάθετου στο $\Pi_1\Pi_2$ υπάρχουν δύο υπερβολές ενισχυτικής συμβολής.

- Να βρείτε τη συχνότητα και το μήκος των κυμάτων που δημιουργούνται στην επιφάνεια του νερού.
- Να υπολογίσετε τις αποστάσεις r_1 και r_2 .
- Να γράψετε την εξίσωση απομάκρυνσης του φελλού σε συνάρτηση με το χρόνο και να την παραστήσετε γραφικά για το χρονικό διάστημα $0\text{s} \leq t \leq 1,5\text{s}$.
- Να βρείτε την ταχύτητα του φελλού τις χρονικές στιγμές $t_a = \frac{5}{12}\text{s}$, $t_b = \frac{9}{12}\text{s}$ και $t_\gamma = \frac{14}{12}\text{s}$.
- Να βρείτε ποια χρονική στιγμή ο φελλός αποκτά μέγιστη θετική επιτάχυνση για πρώτη φορά μετά τη συμβολή;
- Να παραστήσετε γραφικά σε συνάρτηση με το χρόνο την ολική ενέργεια ταλάντωσης του φελλού για το χρονικό διάστημα $0\text{s} \leq t \leq 1,5\text{s}$.
- Να αποδείξετε ότι όλα τα σημεία της ευθείας που ενώνει τις πηγές έξω από το $\Pi_1\Pi_2$ είναι διαρκώς ακίνητα.
- Να βρείτε πόσα σημεία του ευθυγράμμου τμήματος ανάμεσα στις δύο πηγές εκτελούν ταλάντωση λόγω συμβολής με πλάτος ίσο με το πλάτος ταλάντωσης του σημείου Σ ;
- Να αποδείξετε ότι τα σημεία του ευθυγράμμου τμήματος $\Pi_1\Pi_2$ που ενώνει τις πηγές τα οποία ισαπέχουν από το μέσον του, έχουν κάθε στιγμή ίσες απομακρύνσεις και ίσες ταχύτητες.
- Αυξάνουμε αργά και συνεχώς τη συχνότητα ταλάντωσης των δύο πηγών. Για ποιες συχνότητες ο φελλός θα παραμένει διαρκώς ακίνητος;

ΛΥΣΗ

- Το μέτρο της ταχύτητας του φελλού γίνεται μέγιστο κάθε φορά που περνά από τη θέση ισορροπίας, πράγμα που συμβαίνει δύο φορές σε κάθε πλήρη ταλάντωση. Αφού το μέτρο της ταχύτητας μεγιστοποιείται 12 φορές ανά δευτερόλεπτο, ο φελλός εκτελεί 6 πλήρεις ταλαντώσεις ανά δευτερόλεπτο, δηλαδή $f = 6\text{Hz}$.

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής έχουμε: $v = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda = 0,1\text{m}$.

- Η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης του φελλού δίνεται από τη σχέση:

$$v_{\max} = \omega \cdot A_\Sigma \Rightarrow v_{\max} = 2\pi f \cdot A_\Sigma \Rightarrow A_\Sigma = \frac{v_{\max}}{2\pi f} \Rightarrow A_\Sigma = 0,04\text{m}.$$

Από την εξίσωση ταλάντωσης των δύο πηγών προκύπτει ότι το πλάτος των κυμάτων που διαδίδονται στην επιφάνεια του νερού είναι $A = 0,02\text{m}$.

Αφού $A_\Sigma = 0,04 = 2 \cdot A$ στο Σ συμβαίνει ενισχυτική συμβολή οπότε $r_1 - r_2 = k \cdot \lambda$. Αφού μεταξύ του Σ και της μεσοκάθετης στο $\Pi_1\Pi_2$ υπάρχουν δύο υπερβολές ενισχυτικής συμβολής, το Σ βρίσκεται στην επόμενη άρα $k = 3$. Δηλαδή $r_1 - r_2 = 3 \cdot 0,1 \Rightarrow r_1 - r_2 = 0,3\text{m}$ (1).

Επειδή $r_1 = 2r_2$ από την (1) προκύπτει $2r_2 - r_2 = 0,3 \Rightarrow r_2 = 0,3\text{m}$ και $r_1 = 0,6\text{m}$.

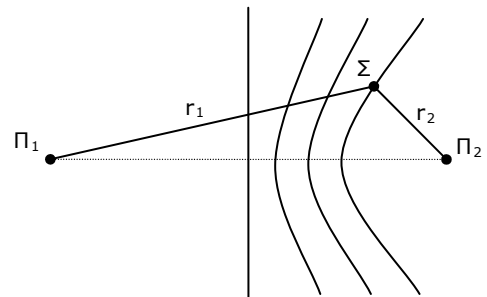
- Το κύμα φτάνει στο σημείο Σ από την πηγή Π_2 τη χρονική στιγμή $t_2 = \frac{r_2}{v} \Rightarrow t_2 = 0,5\text{s}$ και από την πηγή Π_1 τη χρονική στιγμή $t_1 = \frac{r_1}{v} \Rightarrow t_1 = 1\text{s}$.

- Για $0\text{s} \leq t < 0,5\text{s}$ δεν έχει φτάσει κανένα κύμα στο σημείο Σ . Άρα $y_\Sigma = 0$.
- Για $0,5\text{s} \leq t < 1\text{s}$ έχει φτάσει μόνο το κύμα από την πηγή Π_2 στο σημείο Σ .

$$\text{Άρα } y_\Sigma = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda} \right) \Rightarrow y_\Sigma = 0,02 \cdot \eta\mu(12\pi t - 6\pi) \text{ (S.I.)}$$

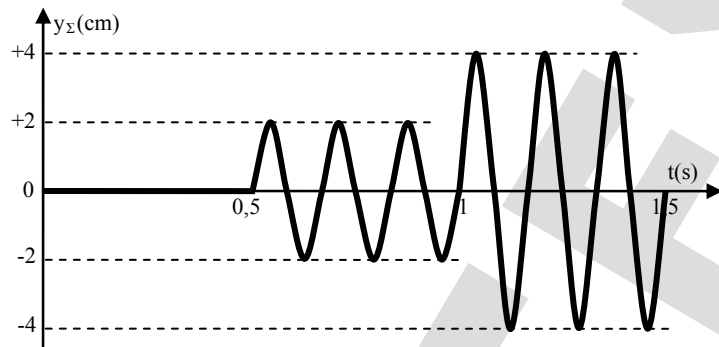
- Για $t \geq 1\text{s}$ έχουν φτάσει και τα δύο κύματα στο σημείο Σ . Η εξίσωση της σύνθετης κίνησης του φελλού είναι:

$$y_\Sigma = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{r_1 - r_2}{2\lambda} \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda} \right) \Rightarrow y_\Sigma = 0,04 \cdot \sigma\upsilon\nu\pi \cdot \eta\mu 2\pi(6t - 4,5) \Rightarrow y_\Sigma = -0,04 \cdot \eta\mu(12\pi t - 9\pi) \Rightarrow y_\Sigma = 0,04 \cdot \eta\mu[(12\pi t - 9\pi) + \pi] \Rightarrow y_\Sigma = 0,04 \cdot \eta\mu(12\pi t - 8\pi) \text{ (S.I.)}$$



$$\text{Οπότε: } y_{\Sigma} = \begin{cases} 0 & \text{για } 0s \leq t < 0,5s \\ 0,02 \cdot \eta\mu(12\pi t - 6\pi) & \text{για } 0,5s \leq t < 1s \quad (\text{S.I.}) \\ 0,04 \cdot \eta\mu(12\pi t - 8\pi) & \text{για } t \geq 1s \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του φελλού σε συνάρτηση με το χρόνο για $0s \leq t \leq 1,5s$ έχει τη μορφή που φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.



δ. Ο φελλός εκτελεί ταλάντωση με $v = \omega \cdot A \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega \cdot t + \phi)$ οπότε για την ταχύτητά του προκύπτει:

$$v_{\Sigma} = \begin{cases} 0 & \text{για } 0s \leq t < 0,5s \\ 0,24\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(12\pi t - 6\pi) & \text{για } 0,5s \leq t < 1s \quad (\text{S.I.}) \\ 0,48\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(12\pi t - 8\pi) & \text{για } t \geq 1s \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας τη στιγμή $t_a = \frac{5}{12}s$, $v_a = 0$, τη στιγμή $t_b = \frac{9}{12}s$, $v_b = 0,24\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(9\pi - 6\pi) \Rightarrow v_b = -0,24\pi \text{ m/s}$

και τη στιγμή $t_{\gamma} = \frac{14}{12}s$, $v_{\gamma} = 0,48\pi \cdot \sigma\upsilon\nu(14\pi - 8\pi) \Rightarrow v_{\gamma} = 0,48\pi \text{ m/s}$.

ε. Η επιτάχυνση ταλάντωσης του φελλού είναι $a = -\omega^2 \cdot A \cdot \eta\mu(\omega t + \phi)$, δηλαδή:

$$a_{\Sigma} = \begin{cases} 0 & \text{για } 0s \leq t < 0,5s \\ -2,88\pi^2 \cdot \eta\mu(12\pi t - 6\pi) & \text{για } 0,5s \leq t < 1s \quad (\text{S.I.}) \\ -5,76\pi^2 \cdot \eta\mu(12\pi t - 8\pi) & \text{για } t \geq 1s \end{cases}$$

$$\text{Πρέπει } 5,76\pi^2 = -5,76\pi^2 \eta\mu(12\pi t - 8\pi) \Rightarrow \eta\mu(12\pi t - 8\pi) = -1 \Rightarrow 12\pi t - 8\pi = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2}$$

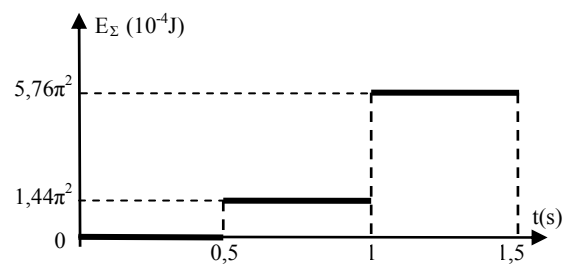
Για $\kappa = 0$ προκύπτει $t = \frac{19}{24}s$ και για $\kappa = 1$ προκύπτει $t = \frac{23}{24}s$ που είναι τιμές μικρότερες της $t = 1s$ που ξεκινά η συμβολή και απορρίπτονται. Για $\kappa = 2$ προκύπτει $t = \frac{27}{24}s$, που είναι αποδεκτή.

Πιο απλά θα μπορούσαμε να πούμε πως αφού για $t = 1s$ που αρχίζει η συμβολή $y = 0$ και $v > 0$, μέγιστη θετική επιτάχυνση θα έχω μετά από $\Delta t = \frac{3T}{4}$, δηλαδή $t = 1 + \frac{3}{24} = \frac{27}{24}s$. Όμως μεθοδολογικά δεν συνιστάται διότι δεν δουλεύει πάντα η διαδικασία.

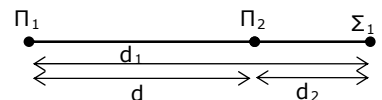
στ. Η ολική ενέργεια ταλάντωσης του φελλού δίνεται από τη σχέση $E_{\Sigma} = \frac{1}{2} m \omega^2 A_{\Sigma}^2$ όπου με αντικατάσταση προκύπτει:

$$E_{\Sigma} = \begin{cases} 0 & \text{για } 0s \leq t < 0,5s \\ 1,44\pi^2 \cdot 10^{-4} \text{ J} & \text{για } 0,5s \leq t < 1s \\ 5,76\pi^2 \cdot 10^{-4} \text{ J} & \text{για } t \geq 1s \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της ενέργειας του φελλού σε συνάρτηση με το χρόνο φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.

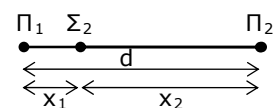


ζ. Έστω τυχαίο σημείο Σ_1 έξω από το $\Pi_1 \Pi_2$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Για το Σ_1 ισχύει $d_1 - d_2 = d \Rightarrow d_1 - d_2 = 0,45m \Rightarrow d_1 - d_2 = 9 \frac{\lambda}{2}$. Αφού οι πηγές είναι σύγχρονες, στο Σ_1 συμβαίνει αποσβεστική συμβολή, άρα το Σ_1 όπως και κάθε σημείο της ευθείας που ενώνει τις πηγές έξω από το $\Pi_1 \Pi_2$ θα παραμένει διαρκώς ακίνητο.



η. Στο σημείο Σ συμβαίνει ενισχυτική συμβολή. Έστω Σ_2 ένα τυχαίο σημείο του ευθυγράμμου τμήματος $\Pi_1 \Pi_2$ στο οποίο συμβαίνει ενισχυτική συμβολή.

$$\text{Πρέπει: } x_1 - x_2 = \kappa \cdot \lambda \Rightarrow d - x_2 - x_2 = \kappa \cdot \lambda \Rightarrow x_2 = \frac{d - \kappa \cdot \lambda}{2}$$



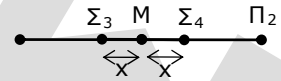
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ

Όμως $0 < x_2 < d \Rightarrow 0 < d - \kappa \cdot \lambda < 2d \Rightarrow -d < \kappa \cdot \lambda < d \Rightarrow -4,5 < \kappa < 4,5$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Άρα $\kappa = \{-4, -3, \dots, +4\}$, δηλαδή 9 σημεία.

- θ. Έστω Σ_3 και Σ_4 δύο σημεία που ισαπέχουν κατά x από το μέσο M του ευθυγράμμου τμήματος $\Pi_1\Pi_2$. Τότε το σημείο Σ_3 απέχει $\frac{d}{2} - x$ και $\frac{d}{2} + x$ αντίστοιχα από τις πηγές Π_1 και Π_2 και το σημείο Σ_4 απέχει $\frac{d}{2} + x$ και $\frac{d}{2} - x$ αντίστοιχα από τις πηγές Π_1 και Π_2 με $x \leq \frac{d}{2}$.



Μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο Σ_3 ισχύει:

$$y_3 = 2A \cdot \sin 2\pi \frac{\left(\frac{d}{2} - x\right) - \left(\frac{d}{2} + x\right)}{2\lambda} \cdot \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\left(\frac{d}{2} - x\right) + \left(\frac{d}{2} + x\right)}{2\lambda} \right) \Rightarrow y_3 = 2A \cdot \sin 2\pi \frac{(-2x)}{2\lambda} \cdot \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d}{2\lambda} \right).$$

Ομοίως για το σημείο Σ_4 ισχύει: $y_4 = 2A \cdot \sin 2\pi \frac{2x}{2\lambda} \cdot \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d}{2\lambda} \right).$

Αφού $\sin \theta = \sin(-\theta)$ συμπεραίνουμε ότι $y_3 = y_4$, άρα και $v_3 = v_4$ κάθε χρονική στιγμή.

- ι. Για να παραμένει ο φελλός διαρκώς ακίνητος πρέπει στο σημείο Σ να συμβαίνει αποσβεστική συμβολή, δηλαδή:

$$r_1 - r_2 = (2k+1) \frac{\lambda'}{2} \Rightarrow r_1 - r_2 = (2k+1) \frac{v}{2f'} \Rightarrow f' = \frac{(2k+1)v}{2(r_1 - r_2)} \Rightarrow f' = (2k+1) \text{ Hz} \text{ με } k \geq 3 \text{ αφού } f' > 6 \text{ Hz}.$$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

ΚΑΜΠΥΛΑΥΚΑ ΒΑΣΙΛΙΚΗ • ΜΑΚΡΑΚΗΣ ΣΤΕΛΙΟΣ • ΠΑΛΙΟΥΡΑΣ ΑΝΔΡΕΑΣ
ΠΑΠΑΔΑΚΗ ΡΕΝΑ • ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ ΣΤΕΡΓΙΟΣ • ΠΟΤΑΜΙΑΝΑΚΗΣ ΚΩΣΤΑΣ
ΣΦΟΥΝΗΣ ΑΝΤΩΝΗΣ • ΦΡΑΓΚΙΑΛΑΚΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ • ΧΑΤΖΗΔΑΚΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ

εκπαιδευτικός οργανισμός

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ