

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδειχθεί ότι:
 $P(A-B)=P(A) - P(A \cap B)$. **Μονάδες 7**
- A2.** Πότε δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα; **Μονάδες 4**
- A3.** Τι εκφράζει η σχετική συχνότητα f_i μιας παρατήρησης x_i ενός δείγματος. **Μονάδες 4**
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα, στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α)** Η διακύμανση εκφράζεται στις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις. **Μονάδες 2**
- β)** Σε μία κανονική κατανομή το εύρος ισούται περίπου με έξι φορές τη μέση τιμή, δηλαδή $R \approx 6 \bar{x}$. **Μονάδες 2**
- γ)** Για την παράγωγο μιας σύνθετης συνάρτησης ισχύει $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ **Μονάδες 2**
- δ)** Πάντοτε ένα μεγαλύτερο δείγμα δίνει πιο αξιόπιστα αποτελέσματα από ένα μικρότερο δείγμα. **Μονάδες 2**
- ε)** Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι ομοιογενές, αν ο συντελεστής μεταβλητότητας δεν ξεπερνά το 10%. **Μονάδες 2**

ΘΕΜΑ Β

Ένα κουτί περιέχει άσπρες, κόκκινες και μαύρες σφαίρες. Παίρνουμε τυχαία μια σφαίρα. Η πιθανότητα να είναι μαύρη είναι $P(M) = \frac{1}{4}$, η πιθανότητα να είναι άσπρη είναι $P(A) = 4\lambda^2$ και η πιθανότητα να είναι κόκκινη είναι $P(K) = -5\lambda + \frac{7}{4}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν για το πλήθος $N(\Omega)$ των σφαιρών που υπάρχουν στο κουτί ισχύει $64 < N(\Omega) < 72$, τότε

- B1.** Να δείξετε ότι $N(\Omega) = 68$ **Μονάδες 6**
- B2.** Να υπολογιστεί η τιμή του λ **Μονάδες 8**
- B3.** Να βρείτε πόσες άσπρες, πόσες μαύρες και πόσες κόκκινες σφαίρες υπάρχουν στο κουτί. **Μονάδες 6**
- B4.** Παίρνουμε τυχαία μία σφαίρα. Να βρεθεί η πιθανότητα αυτή να είναι άσπρη ή μαύρη. **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ Γ

Οι πωλήσεις, σε χιλιάδες ευρώ, που έγιναν από τους πωλητές μιας εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους ομαδοποιήθηκαν σε πίνακα συχνοτήτων με κλάσεις ίσου πλάτους. Το αντίστοιχο πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$ έχει διαδοχικές κορυφές τις:

A(8, 0) B(10, 10) Γ(12, 20) Δ(14, y_Δ)
 E(16, y_E) Z(18, 10) H(20, 0)

όπου y_Δ, y_E οι τεταγμένες των κορυφών Δ και Ε του πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖΗ.

- Γ1.** Να υπολογιστούν οι τεταγμένες y_Δ και y_E των κορυφών Δ και Ε, αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή των πωλήσεων στη διάρκεια του έτους είναι 14200 ευρώ και το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο προς τον οριζόντιο άξονα **Μονάδες 7**
- Γ2.** Να σχεδιαστεί το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$. **Μονάδες 3**
- Γ3.** Να κατασκευαστεί ο πίνακας των σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$ της κατανομής των πωλήσεων που έγιναν από τους πωλητές της εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους. **Μονάδες 7**
- Γ4.** Η διεύθυνση της εταιρείας αποφάσισε τη χορήγηση ενός επιπλέον εφάπαξ ποσού σε όσους πωλητές έχουν κάνει ετήσιες πωλήσεις τουλάχιστον 15000 ευρώ. Να υπολογιστεί το ποσοστό των πωλητών που θα λάβουν αυτό το ποσό. **Μονάδες 4**
- Γ5.** Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής των πωλήσεων οι οποίες έγιναν από τους πωλητές της εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους και του οριζόντιου άξονα είναι 80. Να βρείτε τον αριθμό των πωλητών που δικαιούνται το εφάπαξ ποσό που αναφέρεται στο Γ4 ερώτημα. **Μονάδες 4**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Δ1. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 8

Δ2. Αν A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$ και $P(A), P(B)$ είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(A \cap B), P(A - B), P(A \cup B), P(B - A)$.

Μονάδες 8

Δ3. Δίνεται η συνάρτηση

$$h(x) = e^{\frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

α) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = h(x)$.

Μονάδες 3

β) Αν $x_1 < x_2 < x_3$ οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης και $v_i = 2x_i + 1, i=1,2,3$ οι συχνότητες των παρατηρήσεων x_i τότε να βρείτε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων.

Μονάδες 6

Σχόλιο Στατιστικής:

Είναι φανερή η προσπάθεια που γίνεται για αναβάθμιση των θεμάτων στα μαθηματικά. Είναι όμως σκόπιμο να υπάρχει σαφήνεια στα θέματα ώστε να μην αγχώνονται οι υποψήφιοι χωρίς λόγο.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. σελ. 152 Σχολ. βιβλίο

A2. σελ. 142 Σχολ. βιβλίο

A3. Η σχετική συχνότητα μιας τιμής x_i είναι $f_i = \frac{v_i}{v}, i=1,2,\dots,k, k \leq v$ και εκφράζει το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι ίσες με την τιμή x_i .

A4. α) $\rightarrow \Lambda$ β) $\rightarrow \Lambda$ γ) $\rightarrow \Sigma$ δ) $\rightarrow \Lambda$ ε) $\rightarrow \Sigma$

ΘΕΜΑ Β

B1. $P(M) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{N(M)}{N(\Omega)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow N(M) = \frac{1}{4} N(\Omega)$

$$64 < N(\Omega) < 72 \Leftrightarrow 64 < 4N(M) < 72 \Leftrightarrow 16 < N(M) < 18. \text{ Αφού } N(M) \in \mathbb{N} \text{ τότε } N(M) = 17,$$

$$\text{Άρα } N(\Omega) = 4 \cdot 17 = 68$$

B2. Από αξιωματικό ορισμό πιθανότητας έχουμε ότι:

$$P(A) + P(K) + P(M) = 1 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 5\lambda + \frac{7}{4} + \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 5\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = \frac{1}{4}. \text{ Αν } \lambda = 1 \text{ τότε } P(A) = 4 > 1$$

$$\text{άτοπο, άρα } \lambda = 1 \text{ απορρίπτεται. Αν } \lambda = \frac{1}{4} \text{ τότε } P(A) = \frac{1}{4}, P(K) = \frac{1}{2} \text{ και } P(M) = \frac{1}{4} \text{ άρα } \lambda = \frac{1}{4}$$

B3. $P(A) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow N(A) = \frac{68}{4} \Leftrightarrow N(A) = 17$

$$P(K) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{N(K)}{N(\Omega)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow N(K) = \frac{68}{2} \Leftrightarrow N(K) = 34 \text{ και } N(M) = 17 \text{ από B1.}$$

B4. Το ενδεχόμενο η σφαίρα να είναι άσπρη ή μαύρη είναι το $A \cup M$. Αφού $A \cap M = \emptyset$ από τον απλό προσθετικό νόμο: $P(A \cup M) = P(A) + P(M) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Οι σχετικές συχνότητες είναι ίσες με τις τεταγμένες των σημείων B, Γ, Δ, E, Z και γνωρίζουμε ότι το $\Delta E \parallel x'x$ άρα

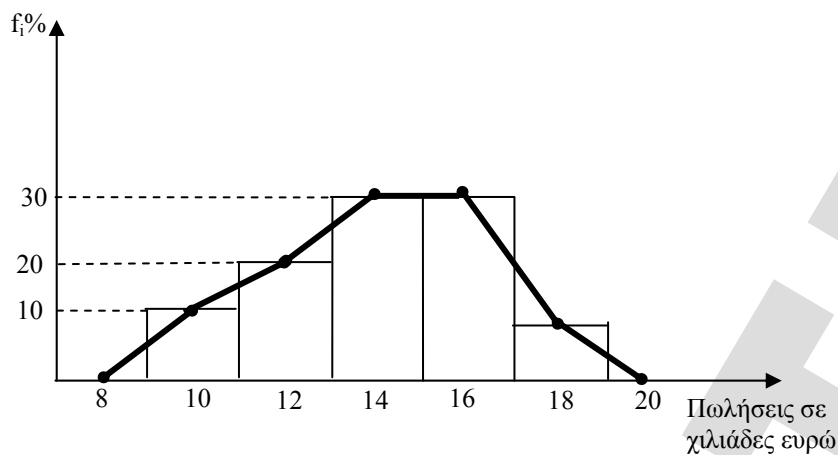
$$y_{\Delta} = y_E \text{ ①. Ακόμα } \sum_{i=1}^5 f_i\% = 100 \Leftrightarrow 40 + 2y_{\Delta} = 100 \text{ άρα } y_{\Delta} = y_E = 30$$

Παρατήρηση: Θα μπορούσε να λυθεί και ως εξής: Γνωρίζουμε ότι

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^5 x_i f_i \Leftrightarrow 14,2 = 10 \cdot 0,1 + 12 \cdot 0,2 + 14 \cdot \frac{y_{\Delta}}{100} + 16 \cdot \frac{y_E}{100} + 18 \cdot 0,1 \Leftrightarrow 9 = \frac{14y_{\Delta}}{100} + \frac{16y_E}{100} \Leftrightarrow 450 = 7y_{\Delta} + 8y_E \text{ ①.}$$

$$\text{Ακόμα από } \sum_{i=1}^5 f_i\% = 100 \Leftrightarrow y_{\Delta} + y_E = 60 \text{ ②. Από (1) και (2) } y_{\Delta} = y_E = 30$$

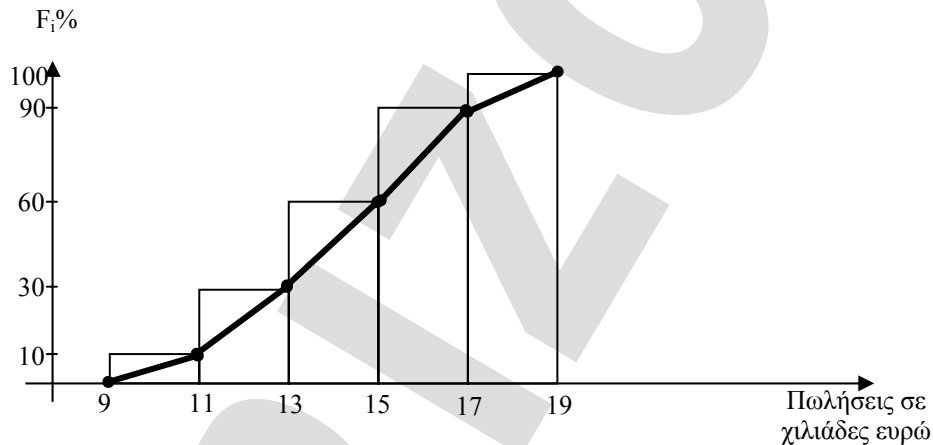
Γ2.



Γ3.

[-)	Κεντρικές τιμές x_i	$f_i\%$
[9 - 11)	10	10
[11 - 13)	12	20
[13 - 15)	14	30
[15 - 17)	16	30
[17 - 19)	18	10
Σύνολα	—	100

Γ4. Φτιάχνουμε πολύγωνο Αθροιστικών Σχετικών συχνοτήτων



Από το πολύγωνο βλέπουμε ότι το ποσοστό των πωλητών που έχουν πωλήσεις τουλάχιστον 15 χιλιάδες ευρώ είναι 40%.

Γ5. Επειδή το εμβαδόν που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και του οριζόντιου άξονα (αν θεωρήσουμε ως μονάδα μήκους του χαρακτηριστικού, το πλάτος c των κλάσεων) είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος, τότε

$n = 80$. Άρα το πλήθος των πωλητών που θα λάβουν το ποσό είναι $\frac{40}{100} \cdot 80 = 32$ πωλητές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} \cdot \frac{1}{3} \left(x^3 - \frac{11}{10}x^2 + \frac{2}{5}x \right)' = e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} \cdot \frac{1}{3} \left(3x^2 - \frac{11}{5}x + \frac{2}{5} \right)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - \frac{11}{5}x + \frac{2}{5} = 0 \Leftrightarrow 15x^2 - 11x + 2 = 0$$

$$\Delta = 121 - 120 = 1, \text{ άρα } x_1 = \frac{2}{5} \text{ ή } x_2 = \frac{1}{3}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
f'(x)	+	-	+	
f(x)				

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$ και στο $\left[\frac{2}{5}, +\infty\right)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right]$

Δ2. Έχουμε $A \subseteq B$ άρα $P(A) \leq P(B)$. Επομένως $P(A) = \frac{1}{3}$ και $P(B) = \frac{2}{5}$

$$A \cap B = A \text{ άρα } P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{3}$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0$$

$$A \cup B = B \text{ άρα } P(A \cup B) = P(B) = \frac{2}{5}$$

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$

Δ3. α. $f(x) = h(x) \Leftrightarrow e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} = e^{\frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right)} \Leftrightarrow \frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right)$

$$5x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right) = 3x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow 5x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right) - 3x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x\left(5x^2 - \frac{11}{2}x + 2 - \frac{9x^2}{2} + 3x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } 10x^2 - 11x + 4 - 9x^2 + 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

ή $x = 3$.

β. Έχουμε $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 3$ τότε $v_1 = 1, v_2 = 5, v_3 = 7$. Άρα $\bar{x} = \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3}{13} = \frac{10 + 21}{13} = \frac{31}{13}$.

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΠΕΤΡΑΚΗ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ

ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ

ΑΝΔΡΕΑΣ ΤΣΙΛΙΦΩΝΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΤΣΑΜΠΟΥΡΗΣ

εκπαιδευτικός οργανισμός

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ