

Άσκηση 1

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \kappa x^3 - 3x^2 + 4$ με $x \in (0,1)$, $\kappa \geq 4$ και ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1,2,\dots,\kappa\}$ με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Αν $A \subseteq \Omega$ με $f(P(A)) = 4 - \frac{4}{\kappa^2}$ και $N(A) = \kappa - 4$ όπου $P(A)$ είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου A και $N(A)$ το πλήθος των στοιχείων του A .

α. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να δειχθεί ότι $f(x) > 0$.

β. Να δείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{3}$

γ. Αν επιπλέον B ένα ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου Ω με $P(B) = \frac{1}{2}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ να υπολογιστεί η πιθανότητα του ενδεχομένου.

i. να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα ενδεχόμενα A και B .

ii. να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A, B .

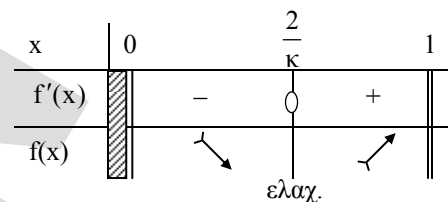
Λύση

α. Για κάθε $x \in (0,1)$ η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x) = 3\kappa x^2 - 6x$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\kappa x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(\kappa x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{\kappa} \quad (x > 0)$$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον πίνακα:

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, \frac{2}{\kappa}]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\frac{2}{\kappa}, 1)$.



Παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = \frac{2}{\kappa}$ το $f(\frac{2}{\kappa}) = 4 - \frac{4}{\kappa^2}$.

Επομένως για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $f(x) \geq f(\frac{2}{\kappa}) = 4 - \frac{4}{\kappa^2} = \frac{4\kappa^2 - 4}{\kappa^2} = \frac{4(\kappa^2 - 1)}{\kappa^2} > 0$.

β. $f(P(A)) = 4 - \frac{4}{\kappa^2} \Leftrightarrow \kappa \left(\frac{N(A)}{N(\Omega)} \right)^3 - 3 \left(\frac{N(A)}{N(\Omega)} \right)^2 + 4 = 4 - \frac{4}{\kappa^2} \Leftrightarrow \frac{N(A)^3 - 3N(A)^2 + 4}{\kappa^2} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow N(A)^3 - 3N(A)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (N(A) + 1)(N(A)^2 - 4N(A) + 4) = 0 \Leftrightarrow N(A) = -1 \text{ (απορρίπτεται)} \text{ ή } N(A) = 2.$$

Επομένως $N(A) = \kappa - 4 \Leftrightarrow \kappa - 4 = 2 \Leftrightarrow \kappa = 6$.

$$\text{Συνεπώς } P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

γ. i. $P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) = 1 - (\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}) = \frac{1}{3}$

ii. Τα ενδεχόμενα $A - B$ και $B - A$ είναι ασυμβίβαστα τότε

$$P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A - B) + P(B - A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{6} = \frac{1}{2}$$

Άσκηση 2

Δείγμα μεγέθους n έχει μέση τιμή $\bar{x} > 0$ και τυπική απόκλιση s .

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}sx^3 + \frac{1}{2}\bar{x} \cdot x^2 + 6x + 2$, $x \in \mathbb{R}$ η οποία έχει ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης στο $x_0 = -2$

α. Να αποδείξετε ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

β. Αν οι τιμές $x_1, x_2, \dots, x_n$ του παραπάνω δείγματος αυξηθούν κατά 12 να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή τυπική απόκλιση ώστε το δείγμα να είναι ομοιογενές.

Λύση

α. $\forall x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f'(x) = sx^2 + \bar{x} \cdot x + 6$. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f σε ένα σημείο της $(x_0, f(x_0))$ είναι $\lambda = f'(x_0) = s x_0^2 + \bar{x} \cdot x_0 + 6$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $f''(x) = 2s x + \bar{x}$. Για $x = -2$ ο συντελεστής διεύθυνσης είναι ελάχιστος, άρα:

$$f''(-2) = 0 \Leftrightarrow -4s + \bar{x} = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = 4s \Leftrightarrow \frac{s}{\bar{x}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow CV_x = 25\% > 10\% \text{ άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.}$$

- β. Έστω $y_1, \dots, y_n$ οι τιμές μετά την αύξηση τότε $y_i = x_i + 12$, $i = 1, \dots, n$ και $\bar{y} = \bar{x} + 12$ και $s_y = s$.

Για να είναι το δείγμα ομοιογενές πρέπει:

$$CV_y \leq 0, 1 \Leftrightarrow \frac{s_y}{\bar{y}} \leq 0, 1 \Leftrightarrow s_y \leq 0, 1(\bar{x} + 12) \Leftrightarrow s \leq 0, 1\bar{x} + 1, 2 \stackrel{a)}{\Leftrightarrow} s \leq 0, 1 \cdot 4s + 1, 2 \Leftrightarrow 0, 6s \leq 1, 2 \Leftrightarrow s \leq 2.$$

Άρα η ζητούμενη τυπική απόκλιση είναι $s = 2$.

Άσκηση 3

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x^2 - 8x + 7$, $x \in \mathbb{R}$ και οι πέντε τιμές μιας μεταβλητής X : $1 + f(1)$, $f'\left(\frac{11}{2}\right)$, α , $-f(2)$, $f(0)$ με μέση τιμή $\bar{x} = 4$.

- α. i. Να βρείτε τις τιμές της μεταβλητής X .

ii. Να βρείτε τη διάμεσό τους, το εύρος και την τυπική τους απόκλιση.

- β. Θεωρούμε A , B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-2x}{f(x)}$, $P(B') = \frac{1}{f'(6)}$ και

$$P(A \cap B) = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x-7}{f(x)}.$$

- i. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B')$, $P(A \cap B)$.

- ii. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Γ : να πραγματοποιηθεί το A ή το B .

Δ : να πραγματοποιηθεί το A και όχι το B .

E : να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A και B .

Λύση

- α. i. Έχουμε $f(x) = x^2 - 8x + 7$ με $f'(x) = 2x - 8$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έχουμε $1 + f(1) = 1 + 0 = 1$, $f'\left(\frac{11}{2}\right) = 3$, $-f(2) = 5$, $f(0) = 7$ και

$$\bar{x} = 4 \Leftrightarrow \frac{1+3+\alpha+5+7}{5} = 4 \Leftrightarrow 16 + \alpha = 20 \Leftrightarrow \alpha = 4.$$

Άρα οι τιμές της μεταβλητής X είναι: 1, 3, 4, 5, 7

- ii. Η διάμεσος των τιμών της X είναι η μεσαία παρατήρηση $\delta = 4$.

Το εύρος $R = 7 - 1 = 6$

$$s^2 = \frac{(1-4)^2 + (3-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2 + (7-4)^2}{5} = 4 \quad \text{Άρα } s = \sqrt{s^2} = 2.$$

- β. i. $P(A) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-2x}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-2x}{x^2 - 8x + 7} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(x-1)}{(x-1)(x-7)} = \frac{1}{3}$

$$P(B') = \frac{1}{f'(6)} = \frac{1}{2 \cdot 6 - 8} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x-7}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x-7}{(x-1)(x-7)} = \frac{1}{6}$$

- ii. $\Gamma = A \cup B$ και $P(\Gamma) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + 1 - P(B') - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{11}{12}$

$$\Delta = A - B \text{ και } P(\Delta) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

$$E = (A \cup B)' \text{ και } P(E) = P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(\Gamma) = 1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$$

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΠΕΤΡΑΚΗ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ

ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ

ΑΝΔΡΕΑΣ ΤΣΙΑΛΙΦΩΝΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΤΣΑΜΠΟΥΡΗΣ

Εκπαιδευτικός οργανισμός

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ