

ΘΕΜΑ Α

A1. Τι ονομάζεται εύρος μιας μεταβλητής;

Μονάδες 6

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η μέση τιμή (μέσος όρος) υπολογίζεται μόνο σε ποσοτικές μεταβλητές. (Μονάδες 2)

β. Αν υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ και είναι $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ αντίστοιχα, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = l_1 \cdot l_2$ (Μονάδες 2)

γ. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, τότε ισχύει:
 $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 2)

δ. Ισχύει ότι $\int_a^b \eta \mu x dx = \sigma \nu \eta \beta - \sigma \nu \eta \alpha$ (Μονάδες 2)

ε. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) . (Μονάδες 2)

Μονάδες 10

A3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ιδιότητες και να τις συμπληρώσετε:

α. $(\ln x)' = \dots\dots\dots$, με $x > 0$ (Μονάδες 3)

β. $(\eta \mu x)' = \dots\dots\dots$ (Μονάδες 3)

γ. Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $a \in \mathbb{R}$, τότε $\int_a^a f(x) dx = \dots\dots\dots$ (Μονάδες 3)

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4}, & \text{αν } x < 4 \\ a, & \text{αν } x = 4 \\ \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} - 3, & \text{αν } x > 4 \end{cases}$$

B1. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$

Μονάδες 10

Μονάδες 10

B2. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$

Μονάδες 10

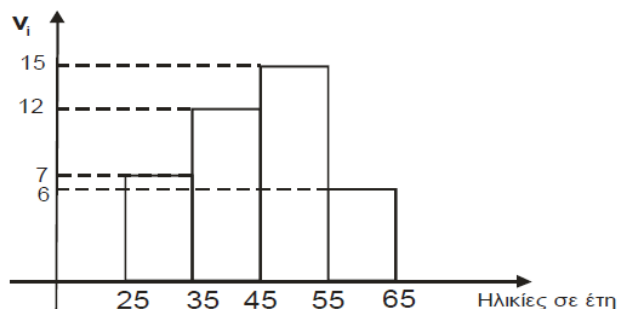
B3. Να βρείτε για ποια τιμή του $a \in \mathbb{R}$ η f είναι συνεχής στο $x_0 = 4$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το παρακάτω ιστόγραμμα, που αφορά τις ηλικίες 40 εργαζομένων σε μια επιχείρηση.

Συχνότητα



Γ1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα που ακολουθεί και να τον συμπληρώσετε με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα.

Ηλικίες [,)	Μέσο διαστήματος K_i	Συχνότητα v_i	$K_i \cdot v_i$	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$
[25,35)					
[35,45)					
[45,55)					
[55,65)					
Σύνολα					

Γ2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των ηλικιών των εργαζομένων.

Μονάδες 10

Γ3. Πόσοι εργαζόμενοι έχουν ηλικία τουλάχιστον 45 ετών;

Μονάδες 5

Γ4. Τι ποσοστό εργαζομένων έχουν ηλικία κάτω των 35 ετών;

Μονάδες 5

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ με $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 6

Δ2. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 5

Δ3. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_1^3 f'(x) dx$

Μονάδες 6

Δ4. Αν με $g(x) = 3x^2 - 12x + 9$ με $x \in \mathbb{R}$, να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = 3$.

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολ. βιβλίο, σελ. 84.

A2. α. $\rightarrow \Sigma$ β. $\rightarrow \Sigma$ γ. $\rightarrow \Lambda$ δ. $\rightarrow \Lambda$ ε. $\rightarrow \Sigma$

A3. α. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, με $x > 0$

β. $(\eta \mu x)' = \sigma \nu \eta x$

γ. Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $a \in \mathbb{R}$, τότε $\int_a^a f(x) dx = 0$

ΘΕΜΑ Β

$$B1. \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{(x-3)(x-4)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4^-} (x-3) = 1$$

$$B2. \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \left(\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} - 3 \right) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \left[\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - 3 \right] = \lim_{x \rightarrow 4^+} \left[\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} - 3 \right] = \lim_{x \rightarrow 4^+} \left[(\sqrt{x}+2) - 3 \right] = 4 - 3 = 1$$

B3. Για να είναι συνεχής η f στο $x_0 = 4$ πρέπει: $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4)$ άρα: $\boxed{\alpha = 1}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Ηλικίες [,)	Μέσο διαστήματος K_i	Συχνότητα v_i	$K_i \cdot v_i$	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$
[25,35)	30	7	210	7	17,5
[35,45)	40	12	480	19	30
[45,55)	50	15	750	34	37,5
[55,65)	60	6	360	40	15
Σύνολα		$v = 40$	1800		100

$$Γ2. \bar{x} = \frac{K_1 v_1 + K_2 v_2 + K_3 v_3 + K_4 v_4}{v} = \frac{1800}{40} = 45 \text{ έτη.}$$

Γ3. Ο εργαζόμενος με ηλικία τουλάχιστον 45 είναι: $v_3 + v_4 = 21$ εργαζόμενοι.

Γ4. Το ποσοστό των εργαζομένων με ηλικία κάτω των 35 ετών είναι: $f_1\% = 17,5\%$

εκπαιδευτικός οργανισμός

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Δ1. Η f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ ως πολυώνυμο με $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \text{ ή } x_2 = 3$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
f'		+	-	+
f				

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ και στο $[3, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, 3]$.

Δ2. Όπως φαίνεται από τον παραπάνω πίνακα μεταβολών η f παρουσιάζει στο $x_1 = 1$ τοπικό μέγιστο το $f(1) = 5$ και τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 3$ το $f(3) = 1$

Δ3. Έχουμε $I = \int_1^3 f'(x) dx = [f(x)]_1^3 = f(3) - f(1) = -4$

Δ4. Η g είναι συνεχής στο $[0, 3]$ ως πολυώνυμο με $g(x) = f'(x)$. Το πρόσημο της g φαίνεται στο ερώτημα **Δ1**.

Τότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^3 |g(x)| dx = \int_0^1 |g(x)| dx + \int_1^3 |g(x)| dx = \int_0^1 g(x) dx - \int_1^3 g(x) dx = \int_0^1 f'(x) dx - \int_1^3 f'(x) dx = \\ &= [f(x)]_0^1 - [f(x)]_1^3 = f(1) - f(0) + 4 = 5 - 1 + 4 = 8 \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΠΕΤΡΑΚΗ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ

ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ

ΑΝΔΡΕΑΣ ΤΣΙΛΙΦΩΝΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΤΣΑΜΠΟΥΡΗΣ