

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x \sin x, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \\ \sqrt{1 + \eta\mu 2x}, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x = -\frac{\pi}{2}$ και $x = \frac{\pi}{2}$.

ΛΥΣΗ

Η f είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ και $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Θα δείξουμε τη συνέχεια στο 0.

$$\text{Είναι: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x \sin x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + \eta\mu 2x} = 1 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Άρα η f είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E = \int_{-\pi/2}^0 |f(x)| dx = \int_{-\pi/2}^0 e^x \sin x dx + \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \eta\mu 2x} dx = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \int_{-\pi/2}^0 (\eta\mu x)' e^x dx = \left[e^x \eta\mu x \right]_{-\pi/2}^0 - \int_{-\pi/2}^0 e^x \eta\mu x dx = e^{-\pi/2} + \int_{-\pi/2}^0 (\sin x)' e^x dx =$$

$$= e^{-\pi/2} + \left[e^x \sin x \right]_{-\pi/2}^0 - \int_{-\pi/2}^0 e^x \sin x dx = e^{-\pi/2} + e^0 - I_1 \Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2} (e^{-\pi/2} + 1).$$

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\eta\mu^2 x + \sin^2 x + 2\eta\mu x \sin x} dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(\eta\mu x + \sin x)^2} dx = \int_0^{\pi/2} (\eta\mu x + \sin x) dx = [-\sin x + \eta\mu x]_0^{\pi/2} = -0 + 1 + 1 - 0 = 2.$$

$$\text{Άρα: } E = \frac{1}{2} e^{-\pi/2} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{1}{2} e^{-\pi/2} + \frac{5}{2} \text{ τ.μ.}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) - f(y) = \frac{|x - y|}{\theta + |x - y|}$ ①, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ($\theta > 0$). Να δείχτεί ότι η γραφική της παράσταση δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

ΛΥΣΗ

Θα εξετάσουμε τη συνέχεια της f . Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Η ① βάζοντας όπου y το x_0 δίνει $f(x) - f(x_0) = \frac{|x - x_0|}{\theta + |x - x_0|}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επειδή

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|x - x_0|}{\theta + |x - x_0|} = 0 \text{ είναι και } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Άρα η f είναι συνεχής στο τυχαίο σημείο x_0 του $\mathbb{R}$, δηλαδή είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Επομένως η γραφική παράσταση της f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

ΑΣΚΗΣΗ 4 (από το βιβλίο του κ. Μ. Λάμπρου)

Έστω $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ γνήσια αύξουσα ή γνήσια φθίνουσα συνάρτηση με f' συνεχή και έστω f^{-1} η αντίστροφη της f . Θεωρούμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής.

α. Δείξτε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} x f'(x) dx = \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x) dx$.

β. Δείξτε ότι $\int_a^\beta f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha)$.

γ. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά την ισότητα στο β. ερώτημα με χρήση εμβαδών.

δ. Έστω g^{-1} η αντίστροφη της συνάρτησης $g: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \eta\mu x$ και h^{-1} η αντίστροφη της $h: \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \epsilon\phi x$. Να

$$\text{αποδείξετε ότι: } \int_0^{\frac{\pi}{4}} g^{-1}(\epsilon\phi x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} h^{-1}(\eta\mu x)dx = \frac{\pi^2}{8}.$$

ΛΥΣΗ

α. Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $y = f(x)$ οπότε $\frac{dy}{dx} = f'(x)$. Επίσης, η $y = f(x)$ δίνει $x = f^{-1}(y)$ και τα όρια α και β της ολοκλήρωσης

$$\text{γίνονται } f(a) \text{ και } f(\beta) \text{ αντίστοιχα. Έχουμε λοιπόν } \int_{f(a)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx = \int_{f(a)}^{f(\beta)} f^{-1}(y)dy = \int_a^\beta \underbrace{f^{-1}(f(x))}_x \frac{dy}{dx} dx = \int_a^\beta x f'(x) dx$$

β. Από το α. ερώτημα και με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε

$$\int_{f(a)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx = \int_a^\beta x f'(x)dx = [x f(x)]_a^\beta - \int_a^\beta (x)' f(x)dx = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha) - \int_a^\beta f(x)dx \text{ απ' όπου έπεται το ζητούμενο.}$$

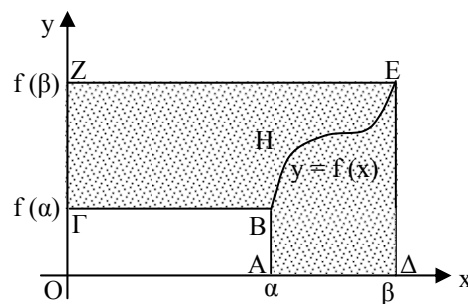
γ. Το χρωματισμένο εμβαδόν ισούται με $(O\Delta EZ) - (OAB\Gamma) = O\Delta \cdot OZ - OA \cdot O\Gamma = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha)$.

Το ίδιο εμβαδόν ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των μεικτόγραμμων χωρίων $\Lambda\Delta\epsilon\eta\beta\alpha$ και $\Gamma\beta\eta\epsilon\zeta\Gamma$.

Το πρώτο ισούται με $\int_a^\beta f(x)dx$. Για το δεύτερο σκεπτόμαστε ως εξής:

Το $\Gamma\beta\eta\epsilon\zeta\Gamma$ είναι το εμβαδόν μεταξύ του άξονα των y , των ευθειών $y = f(a)$, $y = f(\beta)$ και της καμπύλης $y = f(x)$, η οποία γράφεται και $x = f^{-1}(y)$. Αν τώρα εναλλάξουμε τους ρόλους των αξόνων x και y και των μεταβλητών x και y , παρατηρούμε ότι $(\Gamma\beta\eta\epsilon\zeta\Gamma) = \int_{f(a)}^{f(\beta)} f^{-1}(y)dy = \int_{f(a)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx$. Συμπεραίνουμε ότι η ισότητα στο β.

εκφράζει με δύο διαφορετικούς τρόπους το εμβαδόν του χρωματισμένου χωρίου.



δ. Θέτουμε $G: \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R}, G(x) = g^{-1}(\epsilon\phi x)$ και $H: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, H(x) = h^{-1}(\eta\mu x)$.

Παρατηρούμε ότι οι G και H είναι αντίστροφες η μία της άλλης, δηλαδή ισχύει $G^{-1} = H$ και $H^{-1} = G$, διότι ισχύουν οι συνεπαγωγές $y = G(x) \Leftrightarrow y = g^{-1}(\epsilon\phi x)$

$$\Leftrightarrow g(y) = \epsilon\phi x \text{ (από τον ορισμό της } g^{-1})$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu y = \epsilon\phi x \text{ (από τον ορισμό της } g)$$

$$\Leftrightarrow h^{-1}(\eta\mu y) = x \text{ (από τον ορισμό της } h^{-1})$$

$$\Leftrightarrow H(y) = x \text{ (από τον ορισμό της } H)$$

Επίσης ισχύει $G(0) = g^{-1}(\epsilon\phi 0) = g^{-1}(0) = 0$, $G\left(\frac{\pi}{4}\right) = g^{-1}\left(\epsilon\phi \frac{\pi}{4}\right) = g^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$. Από το β. με $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, οπότε $G(\alpha) = 0$, $G(\beta) = \frac{\pi}{2}$

$$\text{έχουμε } \int_0^{\frac{\pi}{4}} G(x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} G^{-1}(x)dx = \frac{\pi}{4} G\left(\frac{\pi}{4}\right) - 0G(0) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{8} \text{ συνεπώς } \int_0^{\frac{\pi}{4}} G(x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} H(x)dx = \frac{\pi^2}{8}, \text{ που είναι αποδεδειγμένο.}$$

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΠΕΤΡΑΚΗ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ

ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ

ΑΝΔΡΕΑΣ ΤΣΙΛΙΦΩΝΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΤΣΑΜΠΟΥΡΗΣ

εκπαιδευτικός οργανισμός

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ