

ΑΣΚΗΣΗ 1

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και 1-1.

i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

ii. Να δείξετε ότι ο αριθμός $\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$ βρίσκεται μεταξύ των αριθμών $f(\alpha)$ και $f(\beta)$.

iii. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:

$$f(0) + f(1) + \dots + f(2010) < \int_0^{2011} f(t)dt < f(1) + f(2) + \dots + f(2011).$$

iv. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (2, 4)$ τέτοιο ώστε: $f(x_0) = \int_1^2 f(2x)dx$.

ΛΥΣΗ

i. Έστω ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη. Τότε υπάρχουν $x_1 < x_2 < x_3$ με $f(x_1) < f(x_2)$ και $f(x_1) > f(x_3)$

(ή $f(x_1) > f(x_2)$ και $f(x_1) < f(x_3)$) οπότε η απόδειξη συνεχίζεται ανάλογα.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - f(x_1)$. Η g είναι συνεχής στο $[x_2, x_3]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Ισχύει ότι $g(x_2) \cdot g(x_3) < 0$ διότι $g(x_2) = f(x_2) - f(x_1) > 0$ και $g(x_3) = f(x_3) - f(x_1) < 0$.

Άρα, από θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (x_2, x_3)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = f(x_1)$, άτοπο διότι $x_0 \neq x_1$ (αφού $x_1 < x_2 < x_0 < x_3$) και η f είναι 1-1. Άρα η f είναι γνησίως μονότονη.

ii. Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \int_{\alpha}^x f(t)dt$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = f(x)$. Συνεπώς η h ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ επομένως υπάρχει

$$\xi \in (\alpha, \beta) \text{ τέτοιο ώστε: } h'(\xi) = \frac{h(\beta) - h(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{1}{\beta - \alpha} \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt - \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt \right) = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt.$$

$$\alpha < \xi < \beta \xrightarrow{f \nearrow} f(\alpha) < f(\xi) < f(\beta) \Leftrightarrow f(\alpha) < h'(\xi) < f(\beta) \Leftrightarrow f(\alpha) < \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt < f(\beta).$$

$$\text{Ομοίως, αν η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα, αποδεικνύεται ότι } f(\beta) < \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt < f(\alpha).$$

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν ο αριθμός $\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$ βρίσκεται μεταξύ των αριθμών $f(\alpha)$ και $f(\beta)$.

iii. Από το ερώτημα ii. προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\text{Για } \alpha = 0, \beta = 1: f(0) < \frac{1}{1-0} \int_0^1 f(t)dt < f(1) \Leftrightarrow f(0) < \int_0^1 f(t)dt < f(1),$$

$$\text{για } \alpha = 1, \beta = 2: f(1) < \frac{1}{2-1} \int_1^2 f(t)dt < f(2) \Leftrightarrow f(1) < \int_1^2 f(t)dt < f(2), \text{ και συνεχίζοντας ομοίως ...}$$

$$\text{για } \alpha = 2010, \beta = 2011: f(2010) < \frac{1}{2011-2010} \int_{2010}^{2011} f(t)dt < f(2011) \Leftrightarrow f(2010) < \int_{2010}^{2011} f(t)dt < f(2011).$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις αυτές κατά μέλη έχουμε:

$$f(0) + f(1) + \dots + f(2010) < \int_0^1 f(t)dt + \int_1^2 f(t)dt + \dots + \int_{2010}^{2011} f(t)dt < f(1) + f(2) + \dots + f(2011) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(0) + f(1) + \dots + f(2010) < \int_0^{2011} f(t)dt < f(1) + f(2) + \dots + f(2011).$$

iv. Έστω $\eta = \int_1^2 f(2x)dx$. Θέτουμε $2x = u$ οπότε: $du = 2dx$, $u_1 = 2, u_2 = 4$ και $\eta = \frac{1}{2} \int_2^4 f(u)du = \frac{1}{4-2} \int_2^4 f(u)du$.

Σύμφωνα με το ερώτημα ii. (για $\alpha = 2, \beta = 4$) ο αριθμός η βρίσκεται μεταξύ των αριθμών $f(2)$ και $f(4)$. Η f είναι συνεχής στο $[2, 4]$ και $f(2) \neq f(4)$ (αφού η f είναι 1-1).

Άρα, από θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει $x_0 \in (2, 4)$ τέτοιο ώστε: $f(x_0) = \eta \Leftrightarrow f(x_0) = \int_1^2 f(2x)dx$.

Αφού η f είναι 1-1, το x_0 αυτό είναι μοναδικό.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η συνάρτηση $g(x) = \int_1^x \frac{f\left(\frac{x}{u}\right)}{u} du$, $x > 0$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $Z = f(\beta) + i\beta$, $w = \alpha + i f(\alpha)$ με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$.

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη $\forall x > 0$ και να υπολογίσετε την $g'(x)$.

β. Αν $\int_a^\beta g''(x) dx = 0$, δείξτε ότι ο μιγαδικός $z \cdot w$ είναι φανταστικός.

γ. Αν $\int_1^e f'(x) \ln x dx = \int_e^1 g'(x) dx$ και η g είναι κυρτή $\forall x > 0$ δείξτε ότι:

i. $f(e) = 0$

ii. $g(x) \geq g(e) \quad \forall x > 0$

ΛΥΣΗ

α. Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως παραγωγίσιμη, η $f\left(\frac{x}{u}\right)$ συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως σύνθεση συνεχών και

$\frac{f\left(\frac{x}{u}\right)}{u}$ συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως πηλίκο συνεχών.

Άρα η g παραγωγίζεται στο $(0, +\infty)$. Θέτουμε $\frac{x}{u} = t \Leftrightarrow \frac{x}{t} = u$ άρα $-\frac{x}{t^2} dt = du$.

Αν $u = 1$ το $t = x$ και αν $u = x$ το $t = 1$.

$$\text{Τότε } g(x) = \int_1^x \frac{f\left(\frac{x}{u}\right)}{u} du = \int_x^1 \frac{f(t)}{\frac{x}{t}} \cdot \left(-\frac{x}{t^2}\right) dt = -\int_x^1 \frac{f(t) \cdot t}{x} \cdot \frac{x}{t^2} dt = \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt \quad \text{άρα } g'(x) = \frac{f(x)}{x}, \quad x > 0.$$

$$\text{β. } \int_a^\beta g''(x) dx = 0 \Leftrightarrow [g'(x)]_a^\beta = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{x}\right]_a^\beta = 0 \Leftrightarrow \frac{f(\beta)}{\beta} - \frac{f(\alpha)}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \frac{f(\beta)}{\beta} = \frac{f(\alpha)}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha f(\beta) = \beta f(\alpha) \quad \textcircled{1}$$

$$z \cdot w = (f(\beta) + i\beta)(\alpha + i f(\alpha)) = \alpha f(\beta) + i f(\alpha) f(\beta) + \alpha \beta i - \beta f(\alpha) = \alpha f(\beta) - \beta f(\alpha) + [\alpha \beta + f(\alpha) f(\beta)] i$$

Ο $z \cdot w$ είναι φανταστικός όταν $\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha f(\beta) = \beta f(\alpha)$ ισχύει από την $\textcircled{1}$

$$\text{γ. i. } \int_1^e f'(x) \ln x dx = \int_e^1 g'(x) dx \Leftrightarrow [f(x) \ln x]_1^e - \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx = [g(x)]_e^1 \Leftrightarrow$$

$$f(e) \ln e - f(1) \ln 1 - \int_1^e g'(x) dx = [g(x)]_e^1 \Leftrightarrow f(e) + [g(x)]_e^1 = [g(x)]_e^1 \Leftrightarrow f(e) = 0$$

ii. Η g είναι κυρτή $\forall x > 0$ άρα η g' είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση $\forall x > 0$.

$$\text{Τότε } \forall x > e \text{ ισχύει } g'(x) > g'(e) \text{ όμως } g'(e) = \frac{f(e)}{e} = 0 \text{ άρα } g'(x) > 0.$$

Τότε

x	0	e	$+\infty$
f'		-	+
f		$\searrow$	$\nearrow$

Η g παρουσιάζει στο $x_0 = e$ ελάχιστο άρα ισχύει $g(x) \geq g(e) \quad \forall x > 0$.

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΠΕΤΡΑΚΗ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ

ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ

ΑΝΔΡΕΑΣ ΤΣΙΛΙΦΩΝΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΤΣΑΜΠΟΥΡΗΣ

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΣ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ