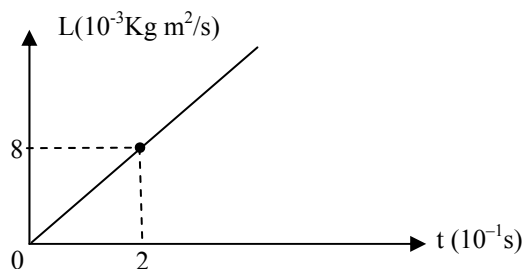


ΑΣΚΗΣΗ

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται μια ομογενής ράβδος ΟΑ μήκους $\ell = 1 \text{ m}$ και μάζας $M = 0,016 \text{ kg}$ η οποία μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το ένα άκρο της Ο και είναι κάθετος σ' αυτή. Η ράβδος σχηματίζει με τον οριζόντιο γωνία θ (με $\eta\mu\theta = 0,6$ και $\sigma\upsilon\eta\theta = 0,8$) και παραμένει ακίνητη με τη βοήθεια οριζόντιου αβαρούς μη εκτατού νήματος ΑΓ που έχει όριο θραύσης $F_{\theta\rho} = 1,44 \text{ N}$.

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνεται να κινηθεί από το σημείο Ο ομογενής κύλινδρος μάζας m_1 και ακτίνας $R = 0,1 \text{ m}$. Ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στη ράβδο έτσι ώστε ο άξονάς του να μετακινείται παράλληλα στον εαυτό του και κάθετα στο κατακόρυφο επίπεδο. Το παρακάτω διάγραμμα παριστάνει τη μεταβολή της στροφορμής του κυλίνδρου σε συνάρτηση με το χρόνο.



Να υπολογιστούν:

- Το μέτρο της στατικής τριβής μεταξύ του κυλίνδρου και της ράβδου.
- Η μάζα m_1 του κυλίνδρου.
- Για ποιες τιμές του συντελεστή στατικής τριβής μεταξύ ράβδου και κυλίνδρου συμβαίνει κύλιση χωρίς ολίσθηση.
- Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου τη στιγμή που το νήμα είναι έτοιμο να σπάσει.
- Η απόσταση που έχει διανύσει ο κύλινδρος τη στιγμή που η δύναμη που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση είναι κάθετη στη δύναμη που ασκεί το νήμα στην ράβδο.

Δίνονται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$ και η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου $I_{\text{cm}} = \frac{m_1 \cdot R^2}{2}$.

ΛΥΣΗ

- Από την κλίση του διαγράμματος στροφορμής – χρόνου μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνολική ροπή που δέχεται ο κύλινδρος ως προς τον άξονα περιστροφής του. Αφού η κλίση είναι σταθερή ισχύει:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \Sigma \tau_{(K)} \Rightarrow \Sigma \tau_{(K)} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}.$$

$$\text{Όμως } \Sigma \tau_{(K)} = T_{\rho, \sigma\tau} \cdot R \Rightarrow \boxed{T_{\rho, \sigma\tau} = 0,4 \text{ N}}.$$

- Ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στη ράβδο. Για τη μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας του, ισχύουν:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = B_{1y} \Rightarrow N = m_1 g \cdot \sigma\upsilon\eta\theta \quad ①$$

και

$$\Sigma F_x = m_1 a_{\text{cm}} \Rightarrow B_{1x} - T_{\rho, \sigma\tau} = m_1 a_{\text{cm}} \Rightarrow$$

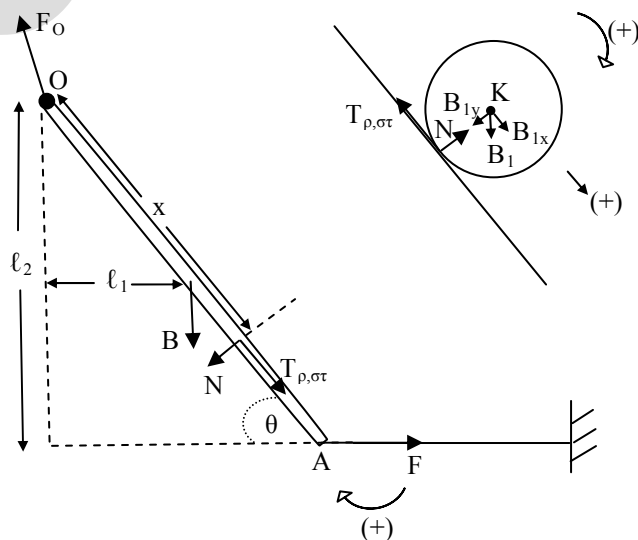
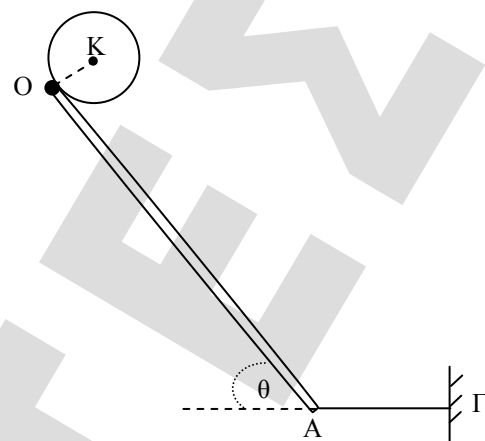
$$\Rightarrow m_1 g \eta\mu\theta - T_{\rho, \sigma\tau} = m_1 \cdot a_{\text{cm}} \quad ②$$

Για τη στροφική κίνηση του κυλίνδρου ισχύει:

$$\Sigma \tau_{(K)} = I_{\text{cm}} \cdot \alpha_{\gamma} \Rightarrow T_{\rho, \sigma\tau} \cdot R = \frac{m_1 \cdot R^2}{2} \cdot \frac{a_{\text{cm}}}{R} \Rightarrow 2T_{\rho, \sigma\tau} = m_1 \cdot a_{\text{cm}} \quad ③$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις ② και ③, έχουμε:

$$m_1 g \eta\mu\theta - T_{\rho, \sigma\tau} = 2T_{\rho, \sigma\tau} \Rightarrow m_1 g \eta\mu\theta = 3T_{\rho, \sigma\tau} \Rightarrow m_1 = \frac{3T_{\rho, \sigma\tau}}{g \eta\mu\theta} \Rightarrow \boxed{m_1 = 0,2 \text{ kg}}.$$



γ. Για να συμβαίνει κύλιση χωρίς ολίσθηση πρέπει:

$$\left. \begin{aligned} T_{\rho, \sigma\tau} &\leq \mu \cdot N \\ \textcircled{1} \Rightarrow N &= m_1 g \cdot \sin\theta \Rightarrow N = 1,6 \text{ N} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\mu \geq 0,25}.$$

δ. Έστω x η μετατόπιση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου τη στιγμή που το νήμα είναι έτοιμο να σπάσει. Τότε ισχύει: $F = F_{\theta\rho} \Rightarrow F = 1,44 \text{ N}$.

Για την ισορροπία της ράβδου ισχύει:

$$\Sigma \vec{\tau}_{(O)} = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_{F_0} + \vec{\tau}_B + \vec{\tau}_N + \vec{\tau}_{T_{\rho, \sigma\tau}} + \vec{\tau}_F = 0 \Rightarrow B \cdot \ell_1 + N \cdot x - F \cdot \ell_2 = 0 \Rightarrow N \cdot x = F \cdot \ell \eta \mu \theta - Mg \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \sin\theta \Rightarrow x = 0,5 \text{ m}.$$

Όμως για τη μεταφορική κίνηση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου ισχύει: $x = \frac{1}{2} \alpha_{cm} \cdot t^2$ $\textcircled{4}$.

Από τη σχέση $\textcircled{3} \Rightarrow \alpha_{cm} = 4 \text{ m/s}^2$.

Οπότε από τη σχέση $\textcircled{4} \Rightarrow t = 0,5 \text{ s}$.

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου είναι $v_{cm} = \alpha_{cm} \cdot t \stackrel{t=0,5s}{\Rightarrow} v_{cm} = 2 \text{ m/s}$.

Για το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου ισχύει:

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \frac{dK_{\mu\epsilon\tau}}{dt} + \frac{dK_{\sigma\tau\rho}}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} + \frac{dW_{\Sigma \tau}}{dt} = \frac{\Sigma F \cdot dx_{cm}}{dt} + \frac{\Sigma \tau \cdot d\theta}{dt} = \Sigma F \cdot v_{cm} + \Sigma \tau \cdot \omega = \Sigma F \cdot v_{cm} + I_{cm} \cdot \alpha_{\gamma\omicron\nu} \cdot \omega \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{dK}{dt} = m_1 \cdot \alpha_{cm} \cdot v_{cm} + \frac{m_1 \cdot R^2}{2} \cdot \frac{\alpha_{cm}}{R} \cdot \frac{v_{cm}}{R} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{3}{2} m_1 \cdot v_{cm} \cdot \alpha_{cm} \Rightarrow \boxed{\frac{dK}{dt} = 2,4 \text{ J/s}}. \end{aligned}$$

ε. Έστω d η απόσταση που έχει διανύσει το κέντρο μάζας του κυλίνδρου τη στιγμή που η δύναμη $\vec{F}_0$ που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση είναι κάθετη στη δύναμη $\vec{F}$ που ασκεί το νήμα στην ράβδο.

Για την ισορροπία της ράβδου ισχύουν:

$$\begin{aligned} \bullet \Sigma \vec{F}_x = 0 &\Rightarrow F_{Ox} = T_{\rho, \sigma\tau} + B_x + F_x \Rightarrow \\ &\Rightarrow F_0 \cdot \eta \mu \theta = T_{\rho, \sigma\tau} + B \cdot \eta \mu \theta + F \cdot \sin\theta \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F_0 = \frac{T_{\rho, \sigma\tau}}{\eta \mu \theta} + B + F \cdot \frac{\sin\theta}{\eta \mu \theta} \quad \textcircled{5}$$

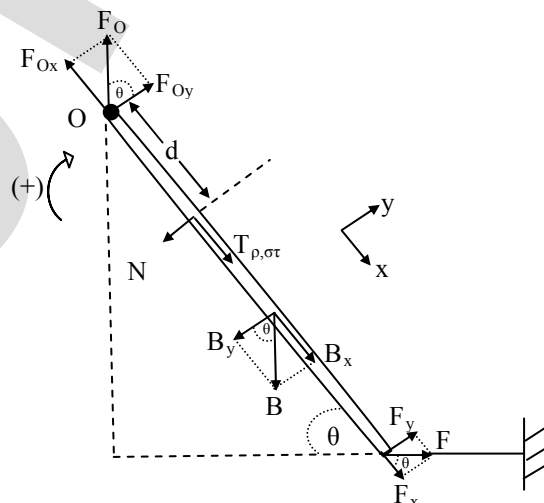
$$\begin{aligned} \bullet \Sigma \vec{F}_y = 0 &\Rightarrow F_{Oy} = N + B_y - F_y \Rightarrow \\ &\Rightarrow F_0 \cdot \sin\theta = N + B \cdot \sin\theta - F \cdot \eta \mu \theta \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F_0 = \frac{N}{\sin\theta} + B - F \cdot \frac{\eta \mu \theta}{\sin\theta} \quad \textcircled{6}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις $\textcircled{5}$ και $\textcircled{6}$, έχουμε:

$$\frac{T_{\rho, \sigma\tau}}{\eta \mu \theta} + B + F \cdot \frac{\sin\theta}{\eta \mu \theta} = \frac{N}{\sin\theta} + B - F \cdot \frac{\eta \mu \theta}{\sin\theta} \Rightarrow F = 0,64 \text{ N}$$

$$\bullet \Sigma \vec{\tau}_{(O)} = 0 \Rightarrow N \cdot d + B_y \cdot \frac{\ell}{2} - F_y \cdot \ell = 0 \Rightarrow N \cdot d = F \eta \mu \theta \cdot \ell - B \cdot \sin\theta \cdot \frac{\ell}{2} \Rightarrow \boxed{d = 0,2 \text{ m}}.$$



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

ΚΑΜΠΥΛΑΥΚΑ ΒΑΣΙΛΙΚΗ • ΜΑΚΡΑΚΗΣ ΣΤΕΛΙΟΣ • ΠΑΛΙΟΥΡΑΣ ΑΝΔΡΕΑΣ
ΠΑΠΑΔΑΚΗ ΡΕΝΑ • ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ ΣΤΕΡΓΙΟΣ • ΠΟΤΑΜΙΑΝΑΚΗΣ ΚΩΣΤΑΣ
ΣΦΟΥΝΗΣ ΑΝΤΩΝΗΣ • ΦΡΑΓΚΙΑΛΑΚΗΣ ΒΑΣΙΛΗΣ • ΧΑΤΖΗΛΑΚΗΣ ΑΝΔΡΕΑΣ

εκπαιδευτικός οργανισμός

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ