ΘΕΜΑ 1ο

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και $\int_0^{f(x)}(e^t+1)dt=x$, $x\in\mathbb{R}$

i. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την f^{-1}.
ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον x΄x, τον y΄y και την $x=e$.
iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.
iv. Να δείξετε ότι $\int_{2009}^{2010}f(t)dt<\int_{2010}^{2011}f(t)dt$.

ΛΥΣΗ

i. Έχουμε $\int_0^{f(x)}(e^t+1)dt=\left[e^t+t\right]_0^{f(x)}=e^{f(x)}+f(x)-1$. Άρα $e^{f(x)}+f(x)-1=x\Leftrightarrow e^{f(x)}+f(x)=x+1$ ①.

$e^{f(x)}f'(x)+f'(x)=1\Leftrightarrow f'(x)(e^{f(x)}+1)=1\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{e^{f(x)}+1}>0$, $x\in\mathbb{R}$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ επομένως και "1-1". Συνεπώς ορίζεται η f^{-1}.
Γνωρίζουμε ότι $f(x)=y\Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$. Τότε η ① γράφεται $e^y+y=f^{-1}(y)+1 \Leftrightarrow f^{-1}(y)=e^y+y-1$, $y\in f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$
ή $f^{-1}(x)=e^x+x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

ii. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$. Επομένως η f είναι συνεχής στο $[0,\ e]$. $f^{-1}(0)=0\Leftrightarrow f(0)=0$. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα $\forall x\ge 0\Leftrightarrow f(x)\ge f(0)\Leftrightarrow f(x)\ge 0$.

Επομένως $f(x)\ge 0, \forall x\in[0,e]$. Τότε το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου είναι $E=\int_0^e f(x)dx$.

Έχουμε $f(x)=y\Leftrightarrow f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow e^y+y-1=x$. Τότε $(e^y+1)dy=dx$.

Αν $x=0\Leftrightarrow f^{-1}(y)=0\Leftrightarrow f^{-1}(y)=f^{-1}(0)\overset{\text{"1-1"}}{\Leftrightarrow} y=0$.

Αν $x=e\Leftrightarrow f^{-1}(y)=e\Leftrightarrow f^{-1}(y)=f^{-1}(1)\overset{\text{"1-1"}}{\Leftrightarrow} y=1$.

Τότε $E=\int_0^e f(x)dx=\int_0^1 y(e^y+1)dy=\int_0^1 ye^y dy+\int_0^1 y dy=[ye^y]_0^1-\int_0^1 e^y dy+\frac{1}{2}[y^2]_0^1=e-e+1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ τ.μ.

iii. Έχουμε ότι η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

Άρα $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Η $f'(x)=\dfrac{1}{e^{f(x)}+1}, x\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση και πράξεις παραγωγισίμων άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$. Τότε

$\forall x<0$ έχουμε $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}\overset{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}f'(x)=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^{f(x)}+1}=1=\lambda$ γιατί $\lim_{x\to-\infty}e^{f(x)}=0$

και $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x)\overset{(1)}{=}\lim_{x\to-\infty}(1-e^{f(x)})=1=\beta$. Άρα η $y=x+1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

$\forall x>0$ έχουμε $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{f(x)}+1}=0$ και $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ άρα η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$.
Προφανώς δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

iv. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\int_0^x f(t)dt, x\in\mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα η g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$g'(x)=f(x)$ και $g''(x)=f'(x)>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Άρα η g΄ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Για την g ισχύει το Θ.Μ.Τ

στο $[2009,2010]$ και στο $[2010,2011]$. Άρα υπάρχουν $x_1\in(2009,2010)$ και $x_2\in(2010,2011)$ τέτοια ώστε

$g'(x_1)=g(2010)-g(2009)$ και $g'(x_2)=g(2011)-g(2010)$.

Όμως $x_1<x_2\overset{g'\uparrow}{\Leftrightarrow} g'(x_1)<g'(x_2)\Leftrightarrow g(2010)-g(2009)<g(2011)-g(2010)\Leftrightarrow$
$\int_0^{2010}f(t)dt-\int_0^{2009}f(t)dt<\int_0^{2011}f(t)dt-\int_0^{2010}f(t)\Leftrightarrow\int_{2009}^{2010}f(t)dt<\int_{2010}^{2011}f(t)dt$.

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω f παραγωγίσιμη στο [2010,2011] και οι μιγαδικοί $z_1 = 2010 + if(2010)$ και $z_2 = 2011 + if(2011)$ όπου $\dfrac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f, που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β. Αν $\lim\limits_{x \to 2010} \int_{2010}^{x} \dfrac{f(x+2010-u)}{(x-2010)(x+2010-u)}du = 1$.

Να δείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία ε_1: $y = x + 2011$.

ΛΥΣΗ

α. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2010+if(2010)}{2011+if(2011)} = \dfrac{(2010+if(2010))(2011-if(2011))}{(2011)^2+f^2(2011)} =$

$\dfrac{2010\cdot 2011 + f(2010)\cdot f(2011)}{(2011)^2+f^2(2011)} + \dfrac{2011f(2010)-2010f(2011)}{(2011)^2+f^2(2011)}\cdot i$.

$\dfrac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{2011f(2010)-2010f(2011)}{(2011)^2+f^2(2011)} = 0 \Leftrightarrow 2011f(2010) - 2010f(2011) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{f(2010)}{2010} = \dfrac{f(2011)}{2011}$.

Έστω $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $x \in [2010, 2011]$ παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγισίμων με $g'(x) = \dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$

και $g(2010) = g(2011)$. Από Θ.Rolle υπάρχει $x_0 \in (2010, 2011)$ τέτοιο ώστε

$g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{{x_0}^2} = 0 \Leftrightarrow x_0 f'(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0) = \dfrac{f(x_0)}{x_0}$.

Η εφαπτομένη της C_f στο x_0 είναι

ε: $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0) = \dfrac{f(x_0)}{x_0}(x-x_0) + f(x_0) = \dfrac{f(x_0)}{x_0}x - f(x_0) + f(x_0)$.

Άρα $y = \dfrac{f(x_0)}{x_0}x$. Προφανώς η ευθεία αυτή, διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β. Έχουμε $\int_{2010}^{x} \dfrac{f(x+2010-u)}{(x-2010)(x+2010-u)}du = \dfrac{1}{x-2010}\int_{2010}^{x}\dfrac{f(x+2010-u)}{x+2010-u}du$.

Έστω $x + 2010 - u = t$ τότε $-du = dt$. Αν $u = 2010$ το $t = x$ και αν $u = x$ το $t = 2010$.

Τότε $\int_{2010}^{x} \dfrac{f(x+2010-u)}{x+2010-u}du = -\int_{x}^{2010}\dfrac{f(t)}{t}dt = \int_{2010}^{x}\dfrac{f(t)}{t}dt$.

Έχουμε, $1 = \lim\limits_{x\to 2010}\int_{2010}^{x}\dfrac{f(x+2010-u)}{(x-2010)(x+2010-u)}du = \lim\limits_{x\to 2010}\dfrac{\int_{2010}^{x}\frac{f(t)}{t}dt}{x-2010} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim\limits_{x\to 2010}\dfrac{\left(\int_{2010}^{x}\frac{f(t)}{t}dt\right)'}{(x-2010)'} = \lim\limits_{x\to 2010}\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{f(2010)}{2010}$.

Άρα $\dfrac{f(2010)}{2010} = 1 \Leftrightarrow f(2010) = 2010$. Όμως $\dfrac{f(2010)}{2010} = \dfrac{f(2011)}{2011}$ άρα $\dfrac{f(2011)}{2011} = 1 \Leftrightarrow f(2011) = 2011$.

Για την f ισχύει το Θ.Μ.Τ. στο [2010,2011], άρα υπάρχει $\xi \in (2010, 2011)$ τέτοιο ώστε

$f'(\xi) = f(2011) - f(2010) = 2011 - 2010 = 1 = \lambda_{\varepsilon_1}$

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΠΕΤΡΑΚΗ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ

ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ

ΑΝΔΡΕΑΣ ΤΣΙΛΙΦΩΝΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΤΣΑΜΠΟΥΡΗΣ